
ANALYSIS III

FÜR PHYSIKER

Prof. Rolf Waldi
Wintersemester 2004/2005

gesetzt in L^AT_EX von Andreas Hasenkopf

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Funktionentheorie	3
2.1	Komplexe Differenzierbarkeit	3
2.2	Komplexe Integration	12
2.3	Der Cauchy'sche Integralsatz	18
2.4	Grundlegende Eigenschaften analytischer Funktionen	23
2.5	Integralauswertung mit Hilfe des Residuensatzes	29
2.6	Pole auf dem Integrationsweg	36
3	Gewöhnliche Differentialgleichungen	39
3.1	Flüsse und autonome Systeme erster Ordnung	39
3.2	Lineare DGL und Systeme	46
3.3	Lineare Systeme und Gleichungen mit konstanten Koeffizienten	50
3.4	Rand- und Eigenwertaufgaben	54
3.5	Die Sturm- Liouville- Aufgabe	59
4	Spezielle Funktionen der Physik	65
4.1	Gleichungen, die aus Separationsansatz stammen	65
4.2	Gewöhnliche DGL im Komplexen (1)	70
4.3	Nachtrag zu 2.4	72
4.4	Gewöhnliche DGL im Komplexen (2)	74
4.5	Regulär- singuläre Punkte	77
4.6	Die Legendre- DGL	84
4.7	Die Besselsche DGL	89

1 Einführung

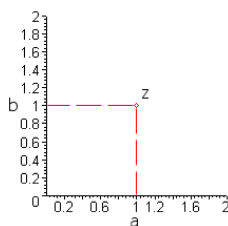
- \mathbb{C} ist ein Körper
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ Teilkörper
- i und 1 bilden eine Basis des \mathbb{R} - Vektorraumes \mathbb{C} , d.h.: Jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ schreibt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination von 1 und i mit reellen Koeffizienten:

$$z = a * 1 + b * i \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Identifiziere daher \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 vermöge der Zuordnung $\mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2$

$$z = a + b i \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \quad 1 = 1 + 0 * i \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$i = 0 + 1 * i \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$



\mathbb{C} : Gauß' sche Zahl; \mathbb{C} erbt von \mathbb{R}^2 eine Metrik:

$$|z| = |a + b i| = \left| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4)$$

$$d(z, w) = |w - z| \quad (5)$$

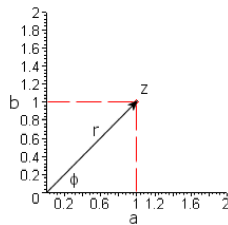
$U \subseteq \mathbb{C}$; $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. f heißt STETIG an der Stelle $z_0 \in U$, wenn f als reelle Funktion stetig ist. Das Paar $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ reeller Zahlen mit $z = a + b i$ heißt PAAR DER KARTESISCHEN KOORDINATEN von z .

z lässt sich auch durch sog. Polarkoordinaten festlegen.

Sei $z = a + b i \neq 0$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{BETRAG von } z \quad (6)$$

$$\phi \quad \text{heißt ARGUMENT von } z \quad (7)$$

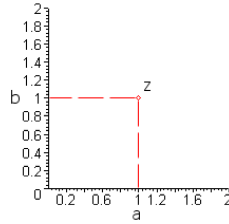


Offenbar gilt: $a = r \cos \phi$, $b = r \sin \phi$

(r, ϕ) Polarkoordinaten von z ; $z = r (\cos \phi + i \sin \phi)$

2 Funktionentheorie

2.1 Komplexe Differenzierbarkeit



$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \quad (8)$$

$$z = a + bi = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ } \mathbb{C}\text{-linear und } w = \alpha(1) \quad (10)$$

$$\Rightarrow \alpha(z) = \alpha(z * 1) = z * \alpha(1) = w z, \text{ wenn } w = \alpha(1) \quad (11)$$

Jede \mathbb{C} -lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist von der Form

$$\alpha(z) = w z \quad (12)$$

mit einer festen Zahl w . Wegen $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist die Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ von oben auch \mathbb{R} -linear.

$$\alpha \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = w * 1 = w = a + bi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\alpha \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = w * i = -b + ai = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \quad (14)$$

Fazit: Die darstellende Matrix der \mathbb{C} -linearen Abbildung $\alpha(z) = w z$ ist

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (15)$$

$\alpha(z) = A z$ ist also in diesem Falle eine Drehstreckung.

2.1.1 Bemerkung

Die \mathbb{C} -linearen Selbstabbildungen $\neq 0$ von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sind die Drehstreckungen, also haben sie eine darstellende Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}, a + bi \neq 0 \quad (16)$$

Erinnerung:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt (REELL) DIFFERENZIERBAR im Punkt $p \in U$, wenn es eine 2×2 -Matrix A gibt, so dass für die zugehörige lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gilt:

$$f(p+h) = f(p) + Ah + \phi(h) \text{ mit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h)}{|h|} = 0 \quad (17)$$

Insbesondere gilt: $\lim_{h \rightarrow 0} f(p+h) = f(p)$, d.h. f ist auch stetig im Punkt p .

A heißt DIFFERENTIAL oder ABLEITUNG von f an der Stelle p . Schreibe für A : $Df(p)$ oder $f'(p)$.

Ist A sogar \mathbb{C} -linear, so soll f KOMPLEX DIFFERENZIERBAR heißen.

Definition:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. f heißt in $p \in G$ KOMPLEX DIFF'BAR (ANALYTISCH), wenn f in

p reell diff'bar und $A = Df(p)$ eine \mathbb{C} - lineare Abbildung darstellt. D.h. nach Bemerkung (2.1.1): Es existiert eine komplexe Zahl $w := f'(p)$, so dass

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = w z \quad \forall z = x + y i = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$f(p+h) - f(p) = f'(p)h + \phi(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h)}{|h|} = 0 \quad (19)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{|h|} \text{ (existiert) } = f'(p) \quad (20)$$

Daraus ergibt sich eine andere Möglichkeit der Definition von analytisch:

$$f \text{ in } p \text{ analytisch} \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{|h|} \text{ existiert} \quad (21)$$

$f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ANALYTISCHE FUNKTION auf G , wenn f in jedem Punkt von G analytisch ist.

Die CAUCHY- RIEMANNSCHE DIFFERENTIALGLEICHUNG $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ wird in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$f(x + y i) = u(x, y) + i v(x, y) \quad (22)$$

$$u, v : G \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad u = \operatorname{Re}(f), v = \operatorname{Im}(f) \quad (23)$$

Identifiziere \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 :

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \text{ mit Koordinatenfunktionen } u, v \quad (24)$$

Sei zunächst f in p reell diff'bar. Dann existieren in p die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = v_y \text{ und} \quad (25)$$

$$f'(p) = \begin{pmatrix} u_x(p) & u_y(p) \\ v_x(p) & v_y(p) \end{pmatrix} \quad (26)$$

Nach (2.1.1) gilt: Die zu $f'(p)$ gehörige Abbildung ist \mathbb{C} - linear

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_x(p) & u_y(p) \\ v_x(p) & v_y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}. \text{ Fazit:} \quad (27)$$

2.1.2 Satz

Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ reell diff'bar im Punkt $p \in G$. f ist analytisch in p

$$\Leftrightarrow u_x(p) = v_y(p) \text{ und } u_y(p) = -v_x(p) \quad (28)$$

(Cauchy- Riemannsche DGLen gelten) Später wird gezeigt: f analytisch $\Rightarrow f'$ analytisch $\Rightarrow f''$ analytisch, etc.

Insbesondere: f analytisch \Rightarrow Die 2. partiellen Ableitungen von u und v existieren. Mit Gleichung (28) folgt:

2.1.3 Bemerkung

$f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch \Rightarrow

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0 \quad (29)$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad (30)$$

Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion sind sog. HARMONISCHE FUNKTIONEN.

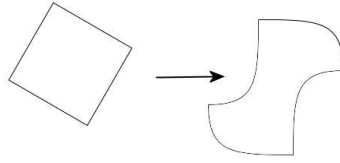
Im Folgenden ist G ein Gebiet ($\hat{=}$ offen und zusammenhängend).

$f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt LOKAL KONFORM, wenn sie reell diff'bar und winkeltreu (und orientierungserhaltend) ist, d.h.: $Df(p)$ ist für alle $p \in G$ eine Drehstreckung.

Sei $\tilde{G} \subseteq \mathbb{R}^2$ ein weiteres Gebiet, $f : G \rightarrow \tilde{G}$. f heißt KONFORM, wenn f lokal konform und bijektiv ist.

2.1.4 Bemerkung

$f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist lokal konform $\Leftrightarrow f$ analytisch auf G und $f'(p) \neq 0$ für alle $p \in G$.



2.1.5 Bemerkung

$f : G \rightarrow \tilde{G}$ konform $\Rightarrow f^{-1} : \tilde{G} \rightarrow G$ ebenfalls konform.

Beispiele analytischer Funktionen:

$$f(z) = z; f'(p) = 1 \quad (31)$$

$$f(z) = \text{const}; f'(p) = 0 \quad (32)$$

$$f(z) = z^n, n \geq 2; f'(p) = n p^{n-1}, \text{ denn} \quad (33)$$

$$f(p+h) = (p+h)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^{n-j} h^j = p^n + (n p^{n-1}) h + h^2 \delta(h) \quad (34)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} h \delta(h) = 0 \delta(0) = 0 \quad (35)$$

2.1.6 Regeln für die Ableitung

1. Seien $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch $\Rightarrow f + g, f g : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und

$$(f + g)' = f' + g' \quad (36)$$

$$(f g)' = f' g + f g' \quad (37)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}, g \neq 0 \quad (38)$$

2. Sind $G_1 \xrightarrow{g} G_2, G_2 \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ analytisch, so auch $f \circ g : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) g'(z) \quad (39)$$

3. $f : G \rightarrow \tilde{G}$ bijektiv und analytisch, $f'(p) \neq 0 \forall p \in G$

$$\stackrel{(2.1.5)}{\Rightarrow} f^{-1} : \tilde{G} \rightarrow G \text{ analytisch; } (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}, w = f(z) \quad (40)$$

Aus Gleichung (33) und Regel 2.1.6.1 ergibt sich induktiv:

Polynome $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ sind analytisch auf \mathbb{C} und $f'(z) = n a_n z^{n-1} + \dots + a_1$.

Ferner: Rationale Funktionen $r(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ mit Polynomen $f(z), g(z)$ sind analytisch überall, wo $g(z) \neq 0$ ist, und es gilt $r' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$.

Tatsachen über Potenzreihen:

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (41)$$

Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ($a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ fest)

2.1.7 Potenzreihenkonvergenz

$$\rho = \sup\{|z - z_0| \mid \sum a_n (z - z_0)^n \text{ konvergiert}\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad (42)$$

heißt KONVERGENZRADIUS von $p(z)$. Es gilt: Die Reihe $p(z)$ konvergiert auf $E_\rho := \{z \mid |z - z_0| < \rho\}$ absolut und lokal gleichmäßig, und sei divergent außerhalb dieses Kreises.

2.1.8 Satz

Die Potenzreihen

$$p(z) = \sum a_n(z - z_0)^n, \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1} \quad (43)$$

haben den gleichen Konvergenzradius. Daraus folgt leicht:

2.1.9 Satz

Die Potenzreihe $p(z)$ stellt im Inneren ihres Konvergenzkreises eine analytische Funktion dar und es gilt:

$$p'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1} \quad \forall z \in E_\rho(z_0) \quad (44)$$

$$\text{Ferner: } q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1} \quad (45)$$

$q(z)$ ist eine sog. Stammfunktion von $p(z)$, d.h. $q(z)$ analytisch auf $E_\rho(z_0)$ und $q'(z) = p(z)$.

Quotientenkriterium: Sind fast alle a_n ungleich Null und existiert

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (46)$$

so ist $\rho = q$.

Hadamard'sche Formel:

$$\frac{1}{\rho} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \quad (47)$$

Die elementaren komplexen Funktionen:

1. Polynome und rationale Funktionen sind analytisch (auf \mathbb{C})
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat nach Quotientenkriterium den Konvergenzradius

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty \quad (48)$$

Also ist die Exponentialfunktion

$$\exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (49)$$

auf ganz \mathbb{C} definiert und dort analytisch. Solche Funktionen heißen GANZE FUNKTIONEN

3. Sinus und Cosinus

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (50)$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (51)$$

sind, wie e^z , ganze Funktionen. Einsetzen und Reihenvergleich ergibt:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (52)$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad (53)$$

$$\Rightarrow \cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad (54)$$

$$\Rightarrow \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \quad (55)$$

Mit der Polardarstellung $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ folgt:

$$z = r e^{i\phi}; \quad |e^{i\phi}| = |\cos \phi + i \sin \phi| = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = 1 \quad (56)$$

4. Weitere ganze Funktionen sind:

$$\sinh z := \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) \quad (57)$$

$$\cosh z := \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) \quad (58)$$

2.1.10 Eigenschaften

1.

$$e^z e^w = e^{z+w} \quad (59)$$

Aus (54) und (59) ergibt sich:

2.

$$\left. \begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w \\ \sin(z+w) &= \cos z \sin w + \cos w \sin z \end{aligned} \right\} \text{Additionstheoreme} \quad (60)$$

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{z+2\pi i} = e^z \quad (61)$$

$$\sin(z+2\pi) = \sin z, \quad \cos(z+2\pi) = \cos z \quad (62)$$

(Periodizität von exp, sin, cos) ergibt sich sofort aus 1. und 2.
Schreibe $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = 1 \quad (63)$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1, \cos y = 1, \sin y = 0 \quad (64)$$

$$\Leftrightarrow x = 0, y = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad (65)$$

$$\Leftrightarrow z = n 2\pi i, n \in \mathbb{Z} \quad (66)$$

3. Gliedweises Ableiten der Reihen ergibt:

$$(e^z)' = e^z, (\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z \quad (67)$$

4.

$$\cos^2 z + \sin^2 z = (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) = e^{iz} e^{-iz} = 1 \quad (68)$$

für alle komplexen Zahlen z .

Vorsicht:

$$\cos ix = \cosh x \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow \infty \quad (69)$$

$$\sin ix = \sinh x \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow \infty \quad (70)$$

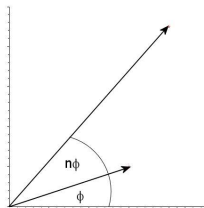
Sinus und Cosinus sind als komplexe Funktionen nicht beschränkt

n-te Wurzel: ($n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$)

Potenzfunktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto w = z^n$

In Polarkoordinaten ($z \neq 0$):

$$z = r e^{i\phi} \mapsto w = r^n (e^{i\phi})^n = r^n e^{i(n\phi)} \quad (71)$$



Problem: Inwiefern gilt eine "Umkehrung" der Potenzfunktion?

Definition: Eine n- te Wurzel von $z \in \mathbb{C}$ ist ein $w \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $w^n = z$.
Schreibe dafür $\sqrt[n]{z}$ (nicht eindeutig!). Die n- ten Wurzeln von z sind also die Nullstellen
des Polynoms $P(T) = T^n - z$ vom Grad n . $\Rightarrow z$ hat maximal n verschiedene n- te Wurzeln.

$z = 0$: $\sqrt[n]{0} = 0$ eindeutig

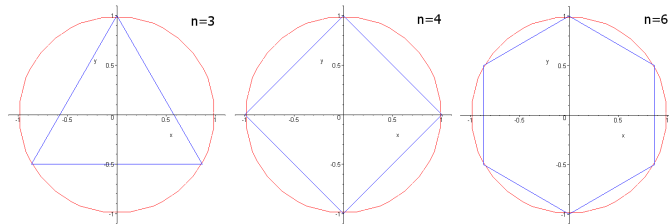
$z = 1$: Die n -ten Wurzeln aus 1 heißen n -TE EINHEITSWURZELN.

$$\zeta_0 = 1, \zeta_1 = e^{2\pi i \frac{1}{n}}, \dots, \zeta_{n-1} = e^{2\pi i \frac{n-1}{n}} \quad (72)$$

$$(\zeta_k)^n = e^{2\pi i k} = 1 \quad (73)$$

$$\Rightarrow \zeta_0 = 1, \zeta_1, \zeta_2 = \zeta_1^2, \dots, \zeta_k = \zeta_1^k, \dots \quad (74)$$

sind die sämtlichen n -ten Einheitswurzeln. $\text{Arg } \zeta_k = \frac{2\pi}{n}k, |\zeta_k| = 1, k = 0, \dots, n-1$. Also liegen die n -ten Einheitswurzeln auf dem Einheitskreis $|z| = 1$ und bilden ein reguläres n -Eck.



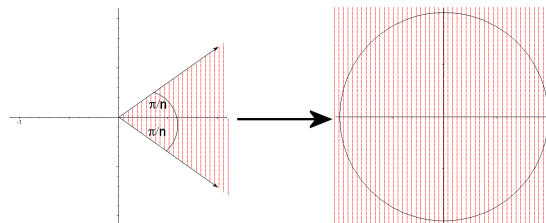
Sei jetzt $z = r e^{i\phi} \neq 0, r \in \mathbb{R}_+$. $w = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\phi}{n}}$ ist eine n -te Wurzel von z , denn

$$w^n = r \left(e^{\frac{i\phi}{n}} \right)^n = r e^{i\phi} = z \quad (75)$$

Ebenso sind $\zeta_1 w, \zeta_2 w, \dots, \zeta_{n-1} w$ n -te Wurzeln von z . $\Rightarrow \{\zeta_1 w, \dots, \zeta_{n-1} w\} =$ Menge der n -ten Wurzeln von z

Geometrisch: Die n -ten Wurzeln von z entstehen aus w durch sukzessives Drehen um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$.

Im Winkelbereich $S = \{r e^{i\phi} \mid r > 0, -\pi < \phi < \pi\}$ mit Öffnungswinkel $\frac{2\pi}{n}$ liegen daher keine 2 verschiedenen n -ten Wurzeln der gleichen Zahl \Rightarrow Die Einschränkung



$$w \rightarrow w^n, s e^{i\phi} \rightarrow s^n e^{i\phi n}$$

$$\pi = \frac{\pi}{n}n, -\pi = \left(-\frac{\pi}{n}\right)n$$

der Potenzfunktion $w \rightarrow w^n = z$ ist bijektiv und $f(S) = G = \{r e^{i\phi} \mid r > 0, -\pi < \phi < \pi\} = \mathbb{C} \setminus \{\text{negative reelle Achse} \cup \{0\}\}$. $f : S \rightarrow G$ ist bijektiv und analytisch mit $f'(z) = n z^{n-1} \neq 0 \forall z \in S \Rightarrow f^{-1} : G \rightarrow S$ ist ebenfalls analytisch mit $(f^{-1}(w))^n = w$, d.h. $f^{-1}(w)$ ist eine n -te Wurzel von $w \forall w \in G$.

Definition: f^{-1} heißt HAUPTZWEIG der n -ten Wurzel. Schreibe

$$\sqrt[n]{z} = f^{-1}(z), z \in G \quad (76)$$

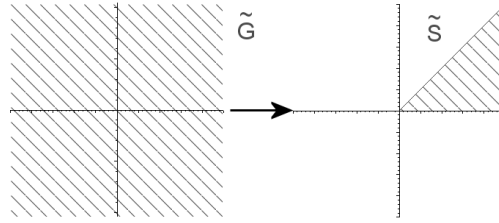
In einer Formel:

$$z = r e^{i\phi} \quad (-\pi < \phi < \pi); \sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\phi}{n}} \in S \quad (77)$$

Die sog. NEBENZWEIGE der n -ten Wurzel entstehen aus dem Hauptzweig durch Drehung um Vielfache des Winkels $\frac{2\pi}{n}$.

Sei $S_k = e^{ik \frac{2\pi}{n}} S$ der um den Winkel $\frac{2\pi}{n}k$ gedrehte Sektor. Zugehöriger Nebenzweig ist dann:

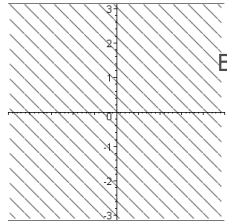
$${}_k \sqrt[n]{z} : G \rightarrow S_k, z \mapsto e^{\frac{2\pi i}{n}k} \sqrt[n]{z} \quad (k = 1, \dots, n-1) \quad (78)$$



G : "negativ geschlitzte Ebene"

Weitere Umkehrungen von $w \rightarrow w^n$ erhält man, indem man den "Schlitz" woanders setzt:

$\tilde{G} = \{re^{i\phi} \mid r > 0, 0 < \phi < 2\pi\}$: positiv geschlitzte Ebene



$re^{i\phi} \mapsto \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\phi}{n}}$, mit $0 < \phi < 2\pi, 0 < \frac{\phi}{n} < \frac{2\pi}{n}$, ist ebenfalls eine (partielle) Umkehrung der Funktion $w \mapsto w^n$.

Der Logarithmus (Umkehrung der Exponentialfunktion)

Betrachte $w = e^z$, wobei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow w = e^x e^{iy} = \rho e^{i\psi}$, wobei gilt:

$$|w| = \rho(z) = e^x, \psi = \psi(z) = \text{Arg}(w) = y = \text{Im } z \tag{79}$$

Fazit: e^z bildet einen Streifen $B = \{z \mid z = x + iy, x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}$ bijektiv auf $G = \{w = \rho e^{i\psi} \mid \rho > 0, -\pi < \psi < \pi\}$ ab.

$$f = \exp_B : B \rightarrow G, z \mapsto e^z \text{ bijektiv, analytisch} \tag{80}$$

$$f'(z) = e^z \neq 0 \stackrel{2.1.5}{\Rightarrow} f^{-1} : G \rightarrow B \text{ analytisch } (f, f^{-1} \text{ konform}) \tag{81}$$

Definition: f^{-1} heißt HAUPTZWEIG des Logarithmus ($\log z$)

$$\log : G \rightarrow B, re^{i\phi} \mapsto \log r + i\phi \ (r > 0, -\pi < \phi < \pi) \tag{82}$$

Dabei: $\log r$ der reelle Logarithmus von $r > 0$

Ableitung des Logarithmus:

$$e^{\log z} = z \Rightarrow 1 = z' = e^{\log z} \log' z = z \log' z \tag{83}$$

$$\Rightarrow \log' z = \frac{1}{z} \tag{84}$$

Die Nebenzweige des Logarithmus entstehen durch Translation in y -Richtung um Vielfache von $2\pi i$:

$$\log_k = \log + 2\pi ik, k \in \mathbb{Z} \tag{85}$$

Allgemeine Exponentialfunktion: Sei $a \in G$ beliebig.

$z \mapsto a^z := e^{z \log a}$ ist eine ganze analytische Funktion.

Allgemeine Potenzfunktion: $\nu \in \mathbb{C}$ beliebig, $G \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^\nu := e^{\nu \log z}$ analytisch.

$$\nu \in \mathbb{N} \quad z^\nu = e^{\overbrace{\log z + \dots + \log z}^{\nu\text{-mal}}} = e^{\log z} \dots e^{\log z} = z \dots z = z^\nu \tag{86}$$

$$\nu = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n} \log r = \log_+ \sqrt[n]{r} \text{ für } r \in \mathbb{R}, r > 0 \tag{87}$$

$$\Rightarrow z^\nu = \exp\left(\frac{1}{n}(\log r + i\phi)\right) = e^{\frac{1}{n} \log r} e^{i\frac{\phi}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\phi}{n}} = \sqrt[n]{z} \tag{88}$$

Hauptzweig der n -ten Wurzel

Laurent- Reihen als analytische Funktionen:

Bespiel: Für $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \dots \text{ gegen } e^{\frac{1}{z}} - 1 \quad (89)$$

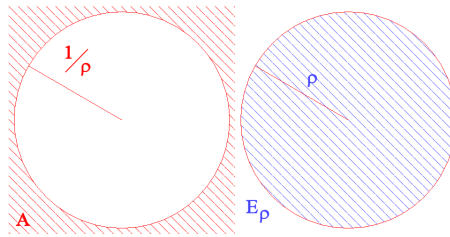
Sie stellt also auf dem Gebiet $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine analytische Funktion dar.

Allgemeiner gilt: Sei $p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ , $0 < \rho \leq \infty$.

Nach 2.1.9 gilt: $p(z)$ ist analytisch auf $E_\rho : |z| < \rho$. Sei $A : |z| > \frac{1}{\rho}$. Dann ist

$$f : A \rightarrow E_\rho \setminus \{0\}, z \mapsto \frac{1}{z} \quad (90)$$

bijektive und analytische Abbildung.



Zusammensetzungen analytischer Funktionen sind analytisch \Rightarrow

2.1.11 Bemerkung

Die Reihe

$$p(f(z)) = p\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_n}{z^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} \quad (91)$$

konvergiert auf A absolut und lokal gleichmäßig. Sie stellt dort eine analytische Funktion dar mit Ableitung

$$\sum_{n=1}^{\infty} -n b_n z^{-n-1} \quad (92)$$

(folgt mit Kettenregel)

Definition: Ein Ausdruck der Form

$$p(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (93)$$

heißt LAURENT- REIHE um z_0 ($z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$ fest, $n \in \mathbb{Z}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} = \text{Hauptteil von } p(z) \quad (94)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \text{Nebenteil von } p(z) \quad (95)$$

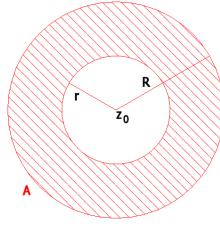
$$p(z) = \text{Hauptteil} + \text{Nebenteil} \quad (96)$$

Der Koeffizient a_{-1} heißt RESIDUUM von $p(z)$ in z_0 .

Definition: Eine Laurent- Reihe heißt KONVERGENT, wenn Haupt- und Nebenteil konvergieren. Aus 2.1.11 folgt:

2.1.12 Bemerkung

Sei $R =$ Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\rho =$ Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$, $r = \frac{1}{\rho}$. Es gelte $R > r$. Dann konvergiert $p(z)$ auf dem Kreisring $A : r < |z - z_0| < R$ und stellt dort eine analytische Funktion dar.



Wichtiger Fall: z_0 heißt POL von $p(z)$, wenn der Hauptteil endlich ist:

$$p(z) = \frac{a_{-N}}{(z - z_0)^N} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \text{Nebenteil von } p(z) \quad (97)$$

In diesem Fall ist $\rho = \infty \Rightarrow r = 0$

$\Rightarrow p(z)$ konvergiert auf der "punktierter Kreisscheibe" $A : 0 < |z - z_0| < R (\leq \infty)$.

Später:

1. f analytisch auf Kreisscheibe $\Rightarrow f =$ Potenzreihe
2. f analytisch auf Kreisring $\Rightarrow f =$ Laurent- Reihe

Vorsicht: f analytisch auf punktierter Kreisscheibe $\not\Rightarrow$ endlicher Hauptteil

Beispiel: $e^{\frac{1}{z}} = f(z)$ analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, hat aber keinen endlichen Hauptteil.

Gesehen: Potenzreihen besitzen innerhalb des Konvergenzradius eine Stammfunktion (gliedweise gebildet)

Frage: Besitzt $p(z)$ auf ganz A eine Stammfunktion (eine Funktion $P : A \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und $P'(z) = p(z)$)?

Für $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$: $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ Stammfunktion von z^n

$$\Rightarrow a_{-1} = 0 : \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1} \text{ Stammfunktion von } p(z) \text{ auf } A$$

$$a_{-1} \neq 0 : G : \text{negativ geschlitzte Ebene,}$$

\log Hauptzweig des Logarithmus: $\log(z - z_0)$ definiert auf $z_0 + G = \{z_0 + z \mid z \in G\}$ und $\frac{a_{-1}}{z - z_0} = (a_{-1} \log(z - z_0))'$, d.h. $a_{-1} \log(z - z_0)$ Stammfunktion von $\frac{a_{-1}}{z - z_0}$ auf $z_0 + G$.

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty, n \neq -1}^{\infty} a_n \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1} + a_{-1} \log(z - z_0) \quad (98)$$

ist Stammfunktion von $p(z)$ auf dem geschlitzten Kreisring $A_0 = A \cap (z_0 + G)$.

2.2 Komplexe Integration

Kurvenintegrale: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ein WEG in G ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Zusätzliche Voraussetzung: γ ist Zusammensetzung von stetig diff'baren Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ("endlich viele Knicke").

Definition: Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Ist γ stetig diff'bar, so setzt man

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)}_{u(t)+iv(t) \in \mathbb{C}} dt := \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt \quad (99)$$

Im Allgemeinen ($\gamma = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_n$):

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz \quad (100)$$

Sei $\gamma^-(t) := \gamma(a+b-t)$, so dass $\gamma^-(a) = \gamma(b)$, $\gamma^-(b) = \gamma(a)$. Mit Substitutionsregel

$$\Rightarrow \int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz \quad (101)$$

2.2.1 Satz

f besitze auf G eine Stammfunktion F , d.h. $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und $F' = f$. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \quad (102)$$

Insbesondere ist zudem γ geschlossen, d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$, so gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad (103)$$

falls f eine Stammfunktion besitzt.

Beweis: Ohne Einschränkung sei γ stetig diff'bar:

$$\frac{d}{dt}(F(\gamma(t))) = f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) \quad (104)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \quad \square \quad (105)$$

Frage: Sei γ geschlossen. Wann gilt Gleichung (103) noch?

Beispiel: $\gamma : |z - z_0| = r$ sei der einfach und positiv durchlaufene Kreis um z_0 mit Radius $r > 0$.

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z_0 + re^{it} \quad (106)$$

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \text{ analytisch} \quad (107)$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0 \quad (108)$$

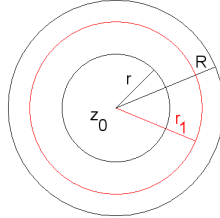
Also ist das Integral im Allgemeinen wegeabhängig.

2.2.2 Bemerkung

Die Laurent- Reihe

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{109}$$

konvergiert im Kreisring $A : r < |z - z_0| < R$. Sei $r < r_1 < R$.



Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r_1} f(z) dz = a_{-1} =: \text{Residuum von } f \text{ bei } z_0 \tag{110}$$

Insbesondere: $a_{-1} \neq 0 \Rightarrow f$ besitzt auf A keine Stammfunktion

Beweis: $g(z) - \sum_{n \neq -1} a_n(z - z_0)^n$ besitzt auf A Stammfunktion $\Rightarrow \int_{|z-z_0|=r_1} g(z) dz = 0$,

$$f(z) = g(z) + \frac{a_{-1}}{z - z_0}.$$

$$\int_{|z-z_0|=r_1} f(z) dz = \underbrace{\int_{|z-z_0|=r_1} g(z) dz}_{=0} + a_{-1} 2\pi i \quad \square \tag{111}$$

2.2.3 Lemma von Goursat

Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und $\Delta \subseteq G$ ein abgeschlossenes Dreieck und $\gamma = \partial\Delta$ der einfach und positiv durchlaufene Rand von Δ . Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \tag{112}$$

Beweis: Zerlege Δ in 4 kongruente Dreiecke $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4$. Die Integrale über die "inneren Wegstrecken" heben sich gegenseitig weg.

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_1^k} f(z) dz \tag{113}$$

$\Delta_1 \subseteq \Delta$ sei das Teildreieck mit maximalem Randintegral.

Zerlege Δ_1 entsprechend in 4 Dreiecke

$\Delta_2 \subseteq \Delta_1 =$ Teildreieck von Δ_1 mit maximalem Randintegral.

Fahre so fort; erhalte eine Folge von Dreiecken

$$\Delta = \Delta_0 \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \dots \supseteq \Delta_n \supseteq \dots \tag{114}$$

Länge $L(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty \Rightarrow \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n$ besteht aus einem Punkt P .

Nach Wahl der Teildreiecke gilt ferner:

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| \leq \dots \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| \tag{115}$$

Nach Voraussetzung ist f analytisch auf G

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{f(p) + (z - p)f'(p)}_{=g(z)} + \phi(z)(z - p) \text{ mit } \lim_{z \rightarrow p} \phi(z) = 0 \tag{116}$$

$g(z)$ besitzt eine Stammfunktion $\Rightarrow \int_{\partial\Delta_n} g(z) dz$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial\Delta_n} (g(z) + \phi(z)(z-p)), dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} \phi(z)(z-p) dz \right| \leq \quad (117) \\ &\leq L(\partial\Delta_n) \text{Max}(|z-p| |\phi(z)|) \leq L(\partial\Delta_n) L(\partial\Delta_n) \text{Max}|\phi(z)| = \\ &= \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 L^2(\partial\Delta) c_n \quad (c_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Aus Gleichung (115) und (117) folgt:

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| = L^2(\partial\Delta) c_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \quad \square \quad (118)$$

Anmerkung: 2.2.3 gilt auch unter der schwächeren Voraussetzung: Es gibt ein $z_0 \in G$, so dass f stetig auf G und f analytisch auf $G \setminus \{z_0\}$.

Definition: ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt KONVEX, wenn gilt:

$$a, b \in G \Rightarrow [a, b] \subseteq G \quad (119)$$

Beispiel: Offene Kreisscheibe: Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt STERNFÖRMIG mit Zentrum p , wenn gilt:

$$z \in G \Rightarrow [p, z] \subseteq G \quad (120)$$

Beispiel: Konvexe Gebiete

2.2.4 Cauchy'scher Integralsatz für sternförmige Gebiete

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ sternförmig und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $f : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch $\Rightarrow f$ hat auf G eine Stammfunktion, insbesondere gilt nach 2.2.1:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (121)$$

für alle geschlossenen Wege $\gamma \subseteq G$.

Beweis: Sei p das Zentrum von G . Setze für $q \in G$

$$F(q) := \int_p^q f(z) dz := \int_{\sigma} f(z) dz, \text{ wobei } \sigma(t) = p + t(q-p), t \in [0, 1] \quad (122)$$

(parametrisierte Strecke von p nach q) G sternförmig und offen mit Zentrum p . Für kleine $h \in \mathbb{C}$ liegt das Dreieck $\Delta = (p, q, q+h)$ ganz in G .

$$0 = \int_{\partial\Delta} f(z) dz, \text{ d.h. } 0 = F(q) + \int_q^{q+h} f(z) dz - F(q+h) \quad (123)$$

$$\Rightarrow F(q+h) - F(q) = \int_q^{q+h} f(z) dz = \int_0^1 f(q+th)h dt = h \int_0^1 f(q+th) dt \quad (124)$$

$$\frac{1}{h} (F(q+h) - F(q)) = \int_0^1 f(q+th) dt \rightarrow \int_0^1 f(q) dt = f(q) \text{ für } h \rightarrow 0 \quad (125)$$

Weil f stetig ist $\Rightarrow F'(q) = f(q) \quad \square$

2.2.5 Cauchy'sche Integralformel

Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $z_0 \in G$, $r > 0$, so dass: $\overline{E} \subseteq G$, wenn

$$E = \{\zeta \mid |\zeta - z_0| < r\} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \quad (126)$$

für alle $z \in E$.

Beweis: Wähle $\epsilon > 0$ so, dass $U = E_{r+\epsilon}(z_0) = \{\zeta \mid |\zeta - z_0| < r + \epsilon\} \subseteq G$. Für $\zeta \in U$ setze:

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z \end{cases} \quad (127)$$

$\Rightarrow g$ analytisch auf $U \setminus \{z\}$.

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} g(\zeta) = f'(z) = g(z), \text{ d.h. } g \text{ stetig bei } z \quad (128)$$

Wende 2.2.4 auf U und g an

$$0 = \int_{\partial E} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial E} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial E} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z)H(z) \quad (129)$$

mit $H(z) = \int_{\partial E} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \partial E$. Nach dem folgenden Hilfssatz ist $H(z)$ analytisch und es gilt:

$$H'(z) = \int_{\partial E} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = - \int_{\partial E} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} \quad (130)$$

$\frac{1}{(\zeta - z)^2}$ hat als Funktion von ζ auf $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ die Stammfunktion $-\frac{1}{\zeta - z}$.

$$\Rightarrow H'(z) = \int_{\partial E} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} = 0 \Rightarrow H(z) = \text{const} \quad (131)$$

auf zusammenhängender Menge E

$$\Rightarrow H(z) = H(z_0) = \int_{\partial E} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 2\pi i \square \quad (132)$$

Hilfssatz: $\gamma \subseteq G$ Weg, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $G : \gamma \times U \rightarrow \mathbb{C}$, $(\zeta, z) \mapsto G(\zeta, z)$ sei stetig. Ferner sei für jedes $\zeta \in \gamma$ $U \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto G(\zeta, z)$ analytisch mit stetiger Ableitung

$$\Rightarrow H(z) := \int_{\gamma} G(\zeta, z) d\zeta \quad (133)$$

ist analytisch mit

$$H'(z) = \int_{\gamma} G_z(\zeta, z) d\zeta \quad \forall z \in U \quad (134)$$

(Vertauschbarkeit von Differential und Integral)

2.2.6 Korollar

Unter den Voraussetzungen aus 2.2.5 gilt für alle $z \in E$:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \quad (135)$$

und $f'(z)$ ist wieder analytisch.

Beweis: Wende Hilfssatz an auf $G(\zeta, z) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, $U = E$.

$$\begin{aligned} G_z(\zeta, z) &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \Rightarrow f'(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)' \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \end{aligned} \quad (136)$$

Da nun $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$ wieder analytisch in z ist, folgt aus dem Hilfssatz (angewandt auf $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$), dass $f'(z)$ analytisch ist mit:

$$f''(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E} \frac{2}{(\zeta - z)^3} d\zeta \text{ usw.} \quad (137)$$

Rekursiv erhält man:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial E} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \forall z \in E, n \in \mathbb{N} \quad \square \quad (138)$$

2.2.7 Potenzreihenentwicklungssatz

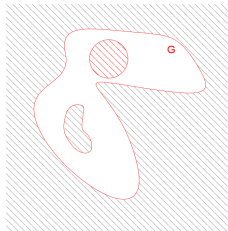
Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und $\rho > 0$ so, dass $E = E_\rho(z_0) \subseteq G$. Dann lässt sich f innerhalb E in eine Potenzreihe um z_0 entwickeln, d.h. es existieren Zahlen $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ mit:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in E \quad (139)$$

Genauer gilt: Für jedes r mit $0 < r < \rho$ ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \stackrel{(138)}{=} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (140)$$

Insbesondere ist Gleichung (139) die Taylorentwicklung von f um den Punkt z_0 .



Beweis: Sei $z \in \mathbb{C}$. Wähle ein r mit $0 < r < \rho$ mit $|z - z_0| < r$. Nach 2.2.5:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (141)$$

Ist $\zeta \in \gamma$, so gilt für $w = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$:

$$|w| = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r} = q < 1 \quad (142)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ konvergiert auf $|w| < 1$ lokal gleichmäßig und zwar gegen $\frac{1}{1-w}$ (Geometrische Reihe)

$$\Rightarrow \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \quad (143)$$

konvergiert auf γ gleichmäßig gegen die stetige Funktion

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \quad (144)$$

Ohne Beweis: In dieser Situation ist Integration und Reihenbildung vertauschbar:

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\underbrace{\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta}_{\alpha_n(r)} \right) (z - z_0)^n \quad (145)$$

mit $\gamma : |\zeta - z_0| = r$. Nach (138):

$$n! \alpha_n(r) = 2\pi i f^{(n)}(z_0) \quad (146)$$

Insbesondere unabhängig von r . Setze:

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \alpha_n(r) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \square \quad (147)$$

2.2.8 Korollar

Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f in jedem Punkt $z_0 \in G$ unendlich oft komplex diff'bar und die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n \quad (148)$$

von f um z_0 konvergiert in jeder offenen Kreisscheibe um z_0 , welche noch ganz in G hineinpasst, und zwar gegen $f(z)$.

Es folgt: Der Konvergenzradius der Taylorreihe von f um z_0 ist mindestens r , wenn $E_r(z_0) \subseteq G$.

Spezialfall: Jede ganze analytische Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n \quad (149)$$

mit unendlichem Konvergenzradius darstellbar (gilt also für alle $z \in \mathbb{C}$).

2.3 Der Cauchy'sche Integralsatz

DIE UMLAUFZAHL

Definition: Sei $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg, $z_0 \notin \gamma$.

$$\nu_\gamma(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \tag{150}$$

heißt UMLAUFZAHL von γ um z_0 .

Beispiel:

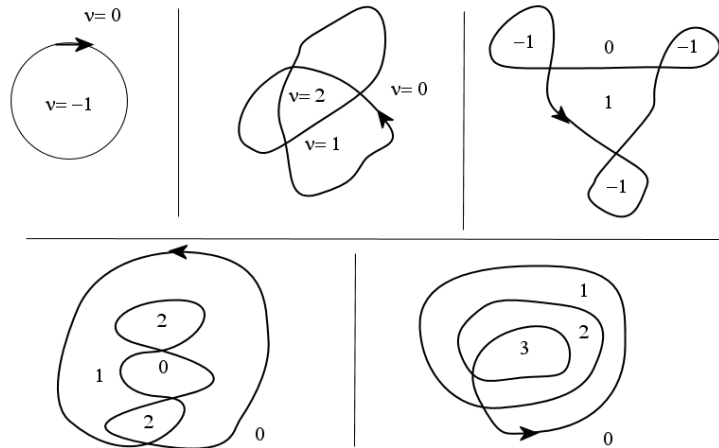
$$|z| = r : \quad \gamma(t) = re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \tag{151}$$

$$\text{Nach 2.2: } \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} = 1 \tag{152}$$

Geometrische Bedeutung der Umlaufzahl (o.E. $z_0 = 0$): Für einen (geschlossenen) Weg $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ ist

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = i\delta, \tag{153}$$

wenn δ die Gesamtbilanz der Winkelveränderungen des Strahles von 0 nach $\gamma(t)$ über das Zeitintervall $[a, b]$ ist ($\gamma \cdot [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$)



Begründung: Zerlege γ in so kleine Stücke $\gamma_k = \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, dass entweder

$$\gamma_k \cap \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq 0\} \neq \emptyset \text{ oder} \tag{154}$$

$$\gamma_k \cap \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\} \neq \emptyset \tag{155}$$

Sei etwa $\gamma_k \cap \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq 0\} = \emptyset$:

In G besitzt $\frac{1}{z}$ die Stammfunktion $\log z = \log r + i\phi$, wenn $z = re^{i\phi}$, $-\pi < \phi < \pi$.

$\gamma_k \subseteq \tilde{G}$: In \tilde{G} besitzt $\frac{1}{z}$ die Stammfunktion $\tilde{\log} z = \log r + i\phi$, wenn $z = re^{i\phi}$, $0 < \phi < 2\pi$.
 $\tilde{\log} z - \log z = 0 \vee 2\pi i$. Nach 2.2.1:

$$\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z} = \log z_k - \log z_{k-1} = \log r_k - \log r_{k-1} + i\delta_k, \tag{156}$$

wenn δ_k der von $\overrightarrow{0\gamma_k}$ überstrichene Winkel ist. Entsprechendes gilt für $\tilde{\log}$, falls $\gamma_k \subseteq \tilde{G}$.
 $\gamma = \sum_{k=1}^n \gamma_k$ geschlossen

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{dz}{z} &= \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z} = \sum_{k=1}^n \underbrace{[\log r_{k-1} - \log r_k]}_{r_0=r_n} + \sum_{k=1}^n i\delta_k \\ &= \sum_{k=1}^n i\delta_k = i\delta \end{aligned} \tag{157}$$

$\delta =$ Summe der Winkelveränderung längs γ .

$$\log z_k - \tilde{\log} z_k = 0 \vee 2\pi i \Rightarrow \delta \in \nu 2\pi \quad (158)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{i\delta}{2\pi i} = \nu \in \mathbb{Z} \quad (159)$$

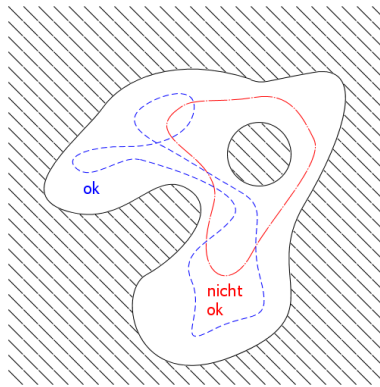
Regel:

1. $\nu(\gamma)(z_0) = 0$, falls z_0 im Außengebiet von γ liegt.
2. Beim Überschreiten von γ "von rechts nach links" erhöht sich die Umlaufzahl um 1.
3. Auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \gamma$ ist $\nu_{\gamma} = \text{const.}$

2.3.1 Cauchy'scher Integralsatz (Umlaufzahl von m)

Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und $\gamma \subseteq G$ ein geschlossener Weg. γ umlaufe nur Punkte, die zu G gehören, d.h.:

$$\nu_{\gamma}(p) = 0 \quad \forall p \notin G \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (160)$$



2.3.2 Cauchy'sche Integralformel für Kreisringe

$f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $A : 0 < r < |z - z_0| < R$ sei ein Kreisring mit $\bar{A} \subseteq G$. Dann gilt für alle $z \in A$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \quad (161)$$

Beweis: $g(\zeta) = f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}$ ist analytisch in einer Umgebung von A_1 bzw. A_2 . ∂A_1 und ∂A_2 umschließen keine Punkte außerhalb von A_1 bzw. A_2 . Cauchy'scher Integralsatz:

$$\int_{\partial A_1} g(\zeta) d\zeta = 0 \quad \vee \quad \int_{\partial A_2} g(\zeta) d\zeta = 0 \quad (162)$$

Wegeadditivität des Integrals: (Die Integrale über die radialen Wege heben sich weg)

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \int_{\partial A_1} g(\zeta) dz + \int_{\partial A_2} g(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\Gamma} g(\zeta) d\zeta - \int_{\delta} g(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (163)$$

$$\int_{\delta} g(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma} g(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = \int_{\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = 2\pi i f(z) \quad (164)$$

Cauchy'sche Integralformel für δ und f . \square

Entwicklung in Laurent-Reihen: Sei $A : 0 \leq r_1 < |z - z_0| < r_2 (\leq \infty)$ ein Kreisring um z_0 .

2.3.3 Bemerkung (Identitätssatz für Laurent- Reihen)

Stellen $L_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu(z - z_0)^\nu$ und $L_2(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_\nu(z - z_0)^\nu$ die gleiche analytische Funktion dar, so ist $a_\nu = b_\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $f_n(z) = (z - z_0)^{-n-1} f(z)$

$\Rightarrow f_n(z)$ ist analytisch auf A und wird durch die Laurent- Reihen

$$(z - z_0)^{-n-1} L_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}_\nu (z - z_0)^\nu, \quad \tilde{a}_\nu = a_{n+1+\nu} \quad (165)$$

$$(z - z_0)^{-n-1} L_2(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{b}_\nu (z - z_0)^\nu, \quad \tilde{b}_\nu = b_{n+1+\nu} \quad (166)$$

dargestellt. Insbesondere ist $a_n = \tilde{a}_{-1}$ und $b_n = \tilde{b}_{-1}$. Nach 2.2.2:

$$\tilde{a}_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f_n(z) dz = \tilde{b}_{-1}, \quad (167)$$

wenn $r_1 < r < r_2 \Rightarrow a_n = b_n \quad \square$

2.3.4 Laurent- Reihen- Entwicklungssatz

Jede analytische Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem Kreisring lässt sich in eine auf A konvergente Laurent- Reihe

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (168)$$

entwickeln. Für $A : r_1 < |\zeta - z_0| < r_2$ und $r_1 < r < r_2$ gilt dann:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (169)$$

Der Hauptteil der Reihe konvergiert für $|\zeta - z_0| > r_1$

Der Nebenteil der Reihe konvergiert für $|\zeta - z_0| < r_2$

Beweis: $0 \leq r_1 < r < r_2$ (o.E. $z_0 = 0$). Wähle R_1, R_2 beliebig mit $r_1 < R_1 < R_2 < r_2$.

2.3.2 anwendbar für $R_1 < |z| < R_2$. Erhalte:

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{g(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{h(z)} \quad (170)$$

Entwickle $g(z)$ und $h(z)$ in Reihen:

$$g(z) : |\zeta| = R_2. \text{ Für } |z| > R_1 \text{ ist } \left| \frac{z}{\zeta} \right| < 1 \quad (171)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \quad (172)$$

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) z^n \quad (173)$$

$$h(z) : |\zeta| = R_1. \text{ Für } |z| > R_1 \text{ ist } \left| \frac{\zeta}{z} \right| < 1 \quad (174)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z} \right)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \quad (175)$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n z^n \text{ für } R_1 < |z| < R_2 \quad (176)$$

Nach 2.3.3: Die Koeffizienten in Gleichung (176) ändern sich nicht, wenn man R_1 bzw. R_2 durch r ersetzt \Rightarrow Gleichung (169) gilt. a_n unabhängig von der Wahl von R_1 bzw. R_2 \Rightarrow Gleichung (176) gilt für alle $z \in A$. \square

2.3.5 Korollar (Cauchy- Abschätzung)

Die Laurent- Reihe

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (177)$$

konvergiere auf A . Sei $r_1 < r < r_2$. Wähle $M \in \mathbb{R}$, so dass $|f(\zeta)| \leq M$ für alle ζ mit $|\zeta - z_0| = r$.

$$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (178)$$

Beweis: Der Integrationsweg $|\zeta - z_0| = r$ hat die Länge $2\pi r$.

$$\Rightarrow |a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^n} \quad \square \quad (179)$$

DAS RESIDUUM: Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch; $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt **ISOLIERTE SINGULARITÄT** von f , wenn G eine sogenannte **PUNKTIERTE UMGEBUNG** von z_0 enthält, wenn also ein $\epsilon > 0$ existiert mit $z \in G$ für alle $z \neq z_0$ mit $|z - z_0| < \epsilon$.

$G = \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $f(z) = \frac{1}{1-z} \log z$ ist definiert auf G und $z_0 = 1$ ist isolierte Singularität von f . $z_0 = -1$ ist keine isolierte Singularität von f .

Ist z_0 eine isolierte Singularität von f , so ist f erklärt im "Kreisring" $0 < |z - z_0| < \epsilon \Rightarrow f$ hat eine Laurent- Entwicklung.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ im Kreisring } A \subseteq G \quad (180)$$

Definition: a_{-1} heißt **RESIDUUM** von f an der Stelle z_0 . Schreibe dafür: $\text{Res}_{z_0}(f)$.

2.3.6 Bemerkung

$$\text{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta) d\zeta \Leftrightarrow \{z \mid z \neq z_0, |z - z_0| \leq r\} \subseteq G \quad (181)$$

2.3.7 Residuensatz

Sei \tilde{G} ein Gebiet, $p_1, \dots, p_r \in \tilde{G}$. f sei analytisch auf dem Gebiet $G = \tilde{G} \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$. Ferner sei $\gamma \subseteq G$ ein geschlossener Weg, welcher nur Punkte von \tilde{G} umläuft. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^r \nu_{\gamma}(p_k) \text{Res}_{p_k}(f) \quad (182)$$

Spezialfall: Es gelte noch:

- γ ist einfach
- Das Innere I von γ liegt stets links von γ (γ umläuft I positiv). Dann:

$$\nu_{\gamma}(p_k) = \begin{cases} 1 & p_k \in I \\ \text{falls} & \\ 0 & p_k \notin I \end{cases} \quad (183)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{p_k \in I} \text{Res}_{p_k}(f) \quad (184)$$

Beweis: Seien h_1, \dots, h_r die Hauptteile der Laurent-Entwicklungen von f an den Stellen p_1, \dots, p_r . Nach 2.3.4: h_k ist analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{p_k\}$. $f - h_k$ ist analytisch in einer Umgebung von p_k für alle $k = 1, \dots, r$.

$$\Rightarrow g = f - \sum_{\nu=1}^r h_\nu \quad (185)$$

mit f, h_ν analytisch auf G . $g = f - h_k - \sum_{\nu=1, \nu \neq k}^r h_\nu$ mit $f - h_k$ analytisch in Umgebung von p_k , $\sum h_\nu$ analytisch in $U_k = \mathbb{C} \setminus \{p_\nu \mid \nu \neq k\}$. $\Rightarrow g$ analytisch in p_k , $k = 1, \dots, r \Rightarrow g$ analytisch auf $\tilde{G} = G \cup \{p_1, \dots, p_r\}$. Cauchy'scher Integralsatz:

$$0 = \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^r \int_{\gamma} h_k(z) dz \quad (186)$$

$$h_k(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_{n,k} (z - p_k)^n \quad (187)$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z - p_k)^n} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \geq 2 \\ \nu_{\gamma}(p_k) & \text{für } n = 1 \end{cases} \quad (188)$$

$$a_{-1,k} =: \text{Res}_{p_k}(f) \quad (189)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} h_k(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-1,k} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - p_k)^n} \quad (190)$$

$$= a_{-1,k} \nu_{\gamma}(p_k) = \nu_{\gamma}(p_k) \text{Res}_{p_k}(f) \quad \square \quad (191)$$

2.4 Grundlegende Eigenschaften analytischer Funktionen

2.4.1 Satz

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Genau dann ist eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, wenn sich f in einer Umgebung jeden Punktes von G in eine Potenzreihe entwickeln lässt.

VIelfachheit von Nullstellen: Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $G \subseteq \mathbb{C}$ beliebig. z_0 heißt die a -Stelle von f , wenn

$$f(z_0) = a \tag{192}$$

Von nun an sei f analytisch, G Gebiet, $n \in \mathbb{N}$. $z_0 \in G$ heißt n -fache a -Stelle von f , wenn

$$f(z_0) = a, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0 \tag{193}$$

Einfache a -Stelle:

$$f(z_0) = a, f'(z_0) \neq 0 \tag{194}$$

Beispiel: 0 ist die n -fache Nullstelle von z^n .

Bemerkung: z_0 ist eine n -fache a -Stelle von $f(z) \Leftrightarrow 0$ ist n -fache Nullstelle von $g(z) = f(z + z_0) - a$.

Also: Ohne Einschränkung $z_0 = 0$, $a = 0$ (in den Beweisen)

z_0 heißt **unendlich-fache a -Stelle**, falls

$$f(z_0) = a, f^{(n)} = 0 \forall n \geq 1 \tag{195}$$

2.4.2 Lemma

Hat f eine unendlich-fache a -Stelle, so ist

$$f(z) = a \forall z \in G \tag{196}$$

Beweis: o.E. 0 ist unendlich-fache Nullstelle von f . Zu zeigen: $f(z) = 0$. Sei $M = \{z \mid z \in G \text{ und } f^{(n)}(z) = 0 \text{ für alle } n \geq 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f^{(n)})^{-1}(0)$. Alle $f^{(n)}$ stetig $\Rightarrow (f^{(n)})^{-1}$ abgeschlossen für alle $n \Rightarrow M$ abgeschlossen. $M \neq \emptyset$, da nach Voraussetzung $0 \in M \Rightarrow M$ abgeschlossene, nichtleere Teilmenge von G .

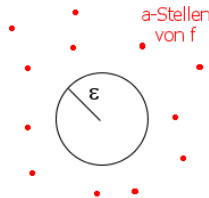
Potenzreihenansatz: Sei $z_0 \in M \Rightarrow$ Die Taylorreihe von f um z_0 ist identisch Null $\Rightarrow f(z) = 0$ in einer Umgebung E von $z_0 \Rightarrow E \subseteq M$.

Fazit: M ist offene Teilmenge von G . M abgeschlossen in $G \Rightarrow G \setminus M$ offen in G ; $G = M \cup (G \setminus M)$ und $M \neq \emptyset$. G zusammenhängend $\Rightarrow G \setminus M = \emptyset \Rightarrow G = M \Rightarrow f(z) = 0$ für alle $z \in G \square$

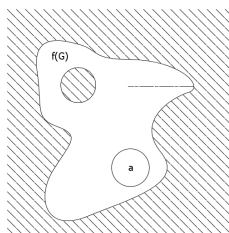
2.4.3 Lemma

Sei z_0 eine n -fache a -Stelle von f , $1 \leq n < \infty$. Dann gilt:

- z_0 ist eine isolierte a -Stelle von f
($\exists \epsilon > 0$, so dass $f(z) \neq a$ für $|z - z_0| < \epsilon$, $z \neq z_0$)



- $f(G)$ enthält eine kleine Kreisscheibe um $a = f(z_0)$.

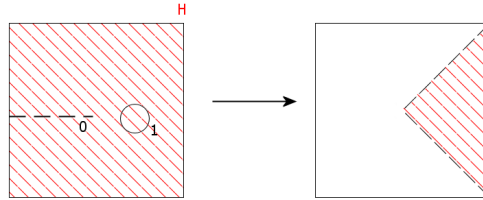


Beweis: ($z_0 = 0, a = 0$)

Nach 2.4.1 existiert eine Umgebung $V \subseteq G$ von 0 mit $f(z) = bz^n(1 + b_1z + b_2z^2 + \dots)$, $b \neq 0, n \geq 1$. Ohne Einschränkung $b = 1$ und $V = G$:

$$f(z) = z^n (1 + b_1z + b_2z^2 + \dots) \quad \forall z \in G \tag{197}$$

Betrachte den Hauptzweig der n-ten Wurzel



$$re^{i\phi}, -\pi < \phi < \pi \mapsto \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\phi}{n}} \tag{198}$$

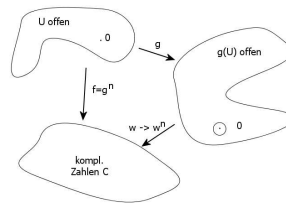
Nach Verkleinerung von G ist $1 + b_1z + b_2z^2 + \dots \in H$ für alle $z \in G$. Für $z \in G$ setze:

$$g(z) := z \sqrt[n]{1 + b_1z + b_2z^2 + \dots} \tag{199}$$

$\Rightarrow g$ ist analytisch auf G und $g'(0) = 1 \neq 0$. Ferner: $g^n(z) = f(z)$.

Wegen $g'(0) \neq 0$ gilt der Satz von der Umkehrfunktion: Es gibt eine Umgebung U von 0, $U \subseteq G$, so dass gilt: $g(U)$ offen, $g : U \rightarrow g(U)$ Diffeomorphismus

Situation:



$0 \in g(U), g(U)$ offen $\Rightarrow \exists \epsilon > 0$ mit $E_\epsilon(0) \subseteq g(U)$.

1. $z \in U$ mit $f(z) = 0 \Rightarrow g^n(z) = f(z) = 0 \Rightarrow g(z) = 0 \Rightarrow z = 0$ (g bijektiv)
2. $E_\epsilon(0) \subseteq g(U), E_{\epsilon^n}(0) = w^n[E_\epsilon(0)] = w^n g(U) = f(U) \subseteq f(G) \square$

2.4.4 Satz von der Gebietstreue

Ist $f \neq const$, so ist $f(G)$ ein Gebiet.

Beweis: mit 2.4.3: Sei $z_0 \in G$. Setze $a = f(z_0)$. Nach 2.4.2: z_0 ist n-fache Nullstelle und $n < \infty \Rightarrow f(G)$ enthält eine ϵ -Umgebung von $a = f(z_0)$. Also ist $f(G)$ offen. f stetig und G zusammenhängend $\Rightarrow f(G)$ zusammenhängend $\Rightarrow f(G)$ Gebiet \square

2.4.5 Identitätssatz

Seien $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Es gelte $f(z) = g(z)$ auf einer Teilmenge A von G, welche in G mindestens einen Häufungspunkt z_0 hat. Dann ist

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in G \tag{200}$$

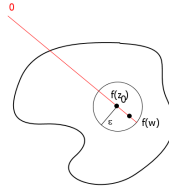
Beweis: $h = f - g$ ist analytisch auf G und $h(z) = 0$ für $z \in A$. $z_0 \in G$ Häufungspunkt von A $\Rightarrow z_0$ ist Häufungspunkt von Nullstellen von h. h stetig $\Rightarrow h(z_0) = 0 \Rightarrow z_0$ ist eine unendlich-fache Nullstelle von h

$$\Rightarrow h(z) = 0 \quad \forall z \in G \Rightarrow f = g \quad \square \tag{201}$$

2.4.6 Das Maximumsprinzip

Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und nicht konstant. Dann hat f kein lokales Betragsmaximum. Insbesondere:

1. Ist $B \subseteq G$ kompakte Teilmenge, so nimmt $|f| |_B$ ihr Maximum auf dem Rand von B an.
2. Hat f ein lokales Betragsmaximum, so ist dieses gleich Null (sonst hätte nämlich $\frac{1}{f(z)}$ ein lokales Betragsmaximum (Widerspruch)).



Beweis: $f(G)$ Gebiet. Sei $z_0 \in G$ $f(G)$ offen $\hat{=} f(G)$ enthält eine ϵ - Umgebung von $f(z_0)$, $\epsilon > 0$. $|f(w)| > |f(z_0)|$, wenn $\epsilon > 0$ und $f(w)$ so wie in der Zeichnung $\Rightarrow f(z_0)$ ist kein lokales Betragsmaximum von f \square

2.4.7 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nichtkonstante Polynom

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (a_n \geq 0, n \geq 1) \tag{202}$$

mit komplexen Koeffizienten a_0, \dots, a_n hat in \mathbb{C} eine Nullstelle.

Durch Polynomdivision durch $z - \lambda$, falls λ Nullstelle von f , erhält man durch Iteration:

$$f(z) = a_n (z - \lambda_1)^{\nu_1} (z - \lambda_2)^{\nu_2} \dots (z - \lambda_r)^{\nu_r} \quad (r \geq 1, \nu_j \geq 1, \lambda_i \neq \lambda_j) \tag{203}$$

Beweis: $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$ gilt offenbar \Rightarrow Es gibt ein $R > 0$, so dass $|f(z)| > |a_0|$ für alle z mit $|z| > R$. $|a_0| = |f(0)| \Rightarrow$ Für alle w mit $|w| > R$ ist

$$|f(w)| \geq |a_0| \geq \text{Min}\{|f(z)| \mid |z| \leq R\} = \mu \tag{204}$$

$$\Rightarrow \mu = \text{Min}\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{C}\} \Rightarrow \mu = 0 \tag{205}$$

$\Rightarrow f$ hat eine Nullstelle z_0 mit $|z_0| \leq R$ \square

Aus Gleichung (203) folgt: $z_0 \in \mathbb{C}$ ist eine k -fache Nullstelle von f (Polynom)

$$\Leftrightarrow f(z) = (z - z_0)^k (a_0 + a_1(z - z_0) + \dots) \text{ mit } a_0 \neq 0 \tag{206}$$

POLE: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f , d.h. $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, ist definiert in einer punktierten Umgebung U von z_0 .

$$U = \{z \mid z \neq z_0, |z - z_0| < \epsilon, \epsilon > 0\} \tag{207}$$

Nach 2.3.3: f besitzt um z_0 eine Laurent- Reihen- Entwicklung, welche in U konvergiert.

Definition: z_0 heißt

1. **HEBBARE SINGULARITÄT** von f , wenn die Laurent- Reihe von f um z_0 keinen Hauptteil hat, d.h.:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad \forall z \in U \tag{208}$$

2. **POL** von f , wenn f in z_0 einen endlichen Hauptteil $\neq 0$ hat, d.h.:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \\ &= \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} (1 + b_1(z - z_0) + \dots + b_n(z - z_0)^n + \dots) \quad (a_{-k} \neq 0, k \geq 1) \end{aligned} \tag{209}$$

In diesem Fall heißt z_0 ein K -FACHER POL von f .

3. **WESENTLICHE SINGULARITÄT** von f , wenn f in z_0 einen unendlichen Hauptteil hat ($f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ für $z \neq 0$ hat wesentliche Singularität für $z_0 = 0$)

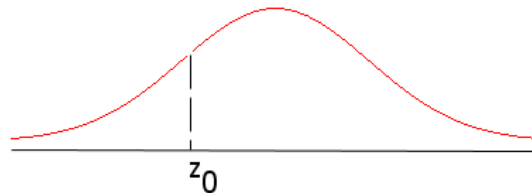
2.4.8 Bemerkung

1. In einer punktierten Umgebung U von z_0 gelte

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (210)$$

Setze $f(z_0) = a_0 \Rightarrow f(z)$ ist auch in z_0 definiert und ist dort analytisch ("Singularität" z_0 von f ist "behooben")

Sinnbildlich: f ist zunächst bei z_0 nicht definiert



Beispiel:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} \quad (211)$$

ist zunächst nur für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert. Laurent-Entwicklung in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:

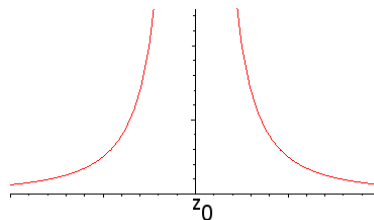
$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \quad (212)$$

Setze $f(0) := 1 \Rightarrow f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ganze analytische Funktion, überall definiert durch die Reihe auf der rechten Seite.

2. (a) Sei z_0 ein Pol der Ordnung $k \geq 1$ von f

$$|f(z)| = \left| \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} \underbrace{(1 + b_1(z - z_0) + \dots)}_{=: h(z)} \right| \rightarrow \infty \text{ für } z \rightarrow z_0 \quad (213)$$

Sinnbildlich:



- (b) z_0 ist Pol der Ordnung $\leq k \Rightarrow (z - z_0)^k f(z) = a_{-k} h(z)$ hat bei z_0 eine hebbare Singularität
 (c) f hat bei z_0 Pol der Ordnung $= k$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(z)} = \frac{(z - z_0)^k}{a_k} h^{-1}(z), \text{ d.h. } h(z_0) = 1 \quad (214)$$

$\frac{1}{f}$ ist in einer Umgebung von z_0 analytisch und z_0 ist eine k -fache Nullstelle von $\frac{1}{f}$. Allgemeiner:

- (d) Seien f, g analytisch in einer (vollen) Umgebung von z_0 ; f habe eine k -fache, g eine m -fache Nullstelle z_0 .

$\Rightarrow \frac{f}{g}$ hat bei z_0

- eine hebbare Singularität, falls $k \geq m$ und z_0 ist $(k-m)$ -fache Nullstelle von $\frac{f}{g}$
- einen Pol der Ordnung $(m-k)$, falls $m > k$

2.4.9 Riemannscher Hebbarkeitssatz

Sei z_0 eine isolierte Singularität von f . $f(z)$ sei beschränkt in einer punktierten Umgebung $U : 0 < |z - z_0| < \epsilon$. Dann ist z_0 eine hebbare Singularität von f (und umgekehrt). Es folgt sofort:

Zusatz: Es gebe ein $k \geq 1$, so dass $(z - z_0)^k f(z)$ beschränkt ist in einer punktierten Umgebung von $z_0 \Rightarrow f(z)$ hat einen Pol der Ordnung $\leq k$.

Beweis: $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$ hat nach 2.4.9 eine hebbare Singularität bei z_0 , d.h.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} g(z) \quad (215)$$

hat Pol der Ordnung $\leq k$ \square

Beweis: Nach Voraussetzung existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $|f(z)| < M$ für alle z mit $0 < |z - z_0| < \epsilon$ für eine feste Schranke $M > 0$.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in U \quad (216)$$

Nach Cauchy- Abschätzung für $0 < r < \epsilon$ ist $|a_{-n}| < \frac{M}{r^{-n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$n \geq 1 \quad |a_{-n}| < M r^n \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow 0 \quad (217)$$

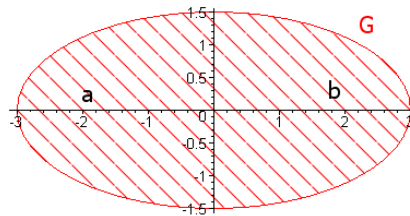
$$a_{-n} = 0 \text{ für } n \geq 0 \Rightarrow \text{Behauptung } \square \quad (218)$$

Fortsetzung reell- analytischer Funktionen im Komplexen

Seien $a < b$ aus $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei reell- analytisch, d.h. sie lässt sich lokal in eine Potenzreihe entwickeln.

2.4.10 Satz

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ analytisch. Dann gibt es ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit $[a, b] \subseteq G$ und eine analytische Funktion auf G , welche f fortsetzt. Diese Fortsetzung ist eindeutig (sie wird wieder mit f bezeichnet).



Beweis: Eindeutigkeit folgt aus 2.4.5 ($A = [a, b]$). Existenz: $x_0 \in [a, b]$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert ein $\epsilon = \epsilon(x_0) > 0$, so dass $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subseteq [a, b]$ und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \forall x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \quad (219)$$

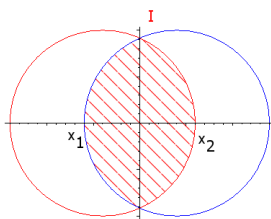
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergiert dann auch noch auf der Kreisscheibe $E(x_0) : |z - x_0| < \epsilon_0$ und stellt dort eine analytische Funktion dar.

$$f_{x_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in E(x_0) \text{ und} \quad (220)$$

$$f_{x_0} |_{[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]} = f \quad (221)$$

Damit ist $G = \bigcup_{x \in [a, b]} E(x)$ Gebiet mit $[a, b] \subseteq G$.

Zeige noch: auf $E(x_0) \cap E(x_1)$ stimmen f_{x_0} und f_{x_1} überein. Dann wird durch $f(z) := f_{x_0}(z)$ falls $z \in E(x_0)$ eine analytische Funktion auf ganz G definiert, welche die ursprüngliche Funktion fortsetzt.



$I = E(x_0) \cap E(x_1) \cap [a, b]$ offenes Intervall.
 $I \neq \emptyset$, falls $E(x_0) \cap E(x_1) = U \neq \emptyset$.

Beweis: f_{x_0} und f_{x_1} sind analytisch auf $U = E(x_0) \cap E(x_1)$ und es gilt

$$f_{x_0} |_I = f |_I = f_{x_1} |_I \Rightarrow f_{x_1} |_U = f_{x_0} |_U \quad \square \quad (222)$$

2.5 Integralauswertung mit Hilfe des Residuensatzes

Aufgabe: $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ reell- analytisch,

$$\int_a^b \frac{g(x)}{h(x)} dx = ? \quad (223)$$

Residuenkalkül: Setze g und h fort auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und wende auf die Fortsetzung von $f = \frac{g}{h}$ den Residuensatz an. Nach 2.4: f hat als Singularität nur Pole.

Bestimmung des Residuums bei einem Pol

2.5.1 Satz

$f(z)$ habe bei z_0 einen Pol der Ordnung $\leq k$. Dann:

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \left((z-z_0)^k f(z) \right)^{(k-1)} \Big|_{z=z_0} \quad (224)$$

Beweis:

$$(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + q(z)(z-z_0)^k \quad (225)$$

Nach 2.3: $\operatorname{Res}_{z_0} f = a_{-1}$. Leite obige Formel $(k-1)$ - mal ab.

$$\left[(z-z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)} = (k-1)! a_{-1} + (z-z_0)r(z) \Rightarrow \text{Behauptung } \square \quad (226)$$

2.5.2 Korollar

Seien g, h analytisch in einer Umgebung von z_0 .

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(z_0) \quad (227)$$

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{g}{(z-z_0)^k} = g(z_0) \quad (k=1) \quad (228)$$

$$= g'(z_0) \quad (k=2) \quad (229)$$

$$h \text{ habe einfache Nullstelle bei } z_0 \Rightarrow \operatorname{Res}_{z_0} \frac{g}{h} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad (230)$$

Beweis von (230): Wende 2.5.1 an mit $f = \frac{g}{h}$ und $k=1$:

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = (z-z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \Big|_{z=z_0} \cdot (z-z_0) f(z_0) \text{ stetig} \quad (231)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{z-z_0}{h(z)} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)} g(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \square \quad (232)$$

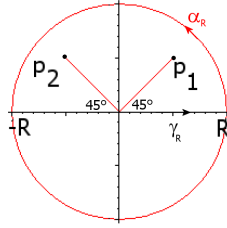
Beispiel: $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z+i)^2} \frac{1}{(z-i)^2}$ hat bei $z_0 = i$ einen Pol zweiter Ordnung

$$\operatorname{Res}_i f = \operatorname{Res}_i \underbrace{\frac{1}{(z+i)^2}}_{=g(z), z_0=i} \frac{1}{(z-i)^2} = g'(i) = -2 \frac{1}{(z+i)^3} \Big|_{z=i} = -\frac{1}{4} i \quad (233)$$

Integralauswertungen:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = ? \quad (234)$$

$1+z^4 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ hat die Nullstellen $p_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}, p_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}, p_3 = e^{\frac{5\pi i}{4}}, p_4 = e^{\frac{7\pi i}{4}} \rightarrow f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ hat einfache Pole bei $p_k, k=1, 2, 3, 4$, und ist sonst analytisch.



α_R = Halbkreis in der oberen Halbebene mit Radius R und Mittelpunkt 0 (positiv durchlaufen), γ_R = Strecke von $-R$ bis R .

$R \gg 1$: Innerhalb von $\gamma_R + \alpha_R$ liegen die Singularitäten p_1 und p_2 von $f(z)$ und sonst keine. Also gilt für $R \gg 1$ nach dem Residuensatz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R + \alpha_R} \frac{dz}{1+z^4} &= \text{Res}_{p_1} \frac{1}{1+z^4} + \text{Res}_{p_2} \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{4z^3} \Big|_{p_1} + \frac{1}{4z^3} \Big|_{p_2} \\ &= -\frac{i}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{235}$$

$$\int_{\gamma_R + \alpha_R} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \left(-\frac{i}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \tag{236}$$

Mit steigendem R nimmt der Integrand auf α_R ab wie $\frac{1}{R^4}$.

$$\frac{\pi R}{R^4} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\alpha_R} \frac{dz}{1+z^4} = 0 \tag{237}$$

(α_R harmloser Hilfsweg)

$$\Rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R + \alpha_R} \frac{dz}{1+z^4} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^4} =: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^4} \tag{238}$$

Allgemeiner gilt (mit dem gleichen Argument):

2.5.3 Regel

P, Q reelle Polynome, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit:

1. $Q(z)$ hat keine reellen Nullstellen
2. Grad Q \geq Grad P + 2 (damit wird obiges α_R harmlos für f, d.h. $\int_{\alpha_R} f(z) dz = 0$)

Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{p, Q(p)=0, \text{Im}(p)>0} \text{Res}_p f \tag{239}$$

2.5.4 Regel

Seien P, Q Polynome, Q ohne reelle Nullstelle, Grad Q > Grad P

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{y, \text{Im}(y)>0, Q(y)=0} \text{Res}_y \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} \right) \tag{240}$$

Beispiel: $a > 0$ reell,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x - \frac{\pi}{4})^2 + a^2} dx \tag{241}$$

$$\cos x = \text{Re}(e^{ix}) \tag{242}$$

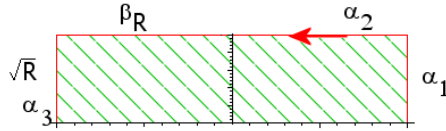
$$\Rightarrow I = \text{Re} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x - \frac{\pi}{4})^2 + a^2} dx}_{=J} \right) \tag{243}$$

Wende 2.5.4 an auf J mit $I = \text{Re}(J)$. Der Integrand hat auf der oberen Halbebene $H : \text{Im}(z) > 0$ nur den Pol $\phi = \frac{\pi}{4} + ia$, dieser ist einfach

$$\text{Res}_\phi \frac{e^{iz}}{(z - \frac{\pi}{4})^2 + a^2} = \frac{e^{i\phi}}{2(\phi - \frac{\pi}{4})} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-a}}{2ia} = \frac{\sqrt{2}\pi e^{-1}}{2a} \quad (244)$$

2.5.5 Lemma

Betrachte für $R > 1$ den folgenden Weg $\beta_R = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.



Unter der Voraussetzung von 2.5.4 gilt dann

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\beta_R} e^{iz} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0 \quad (245)$$

Beweis von 2.5.4: Das schraffierte Rechteck erfasst für große R alle Nullstellen von Q mit $\text{Im} > 0$ ($\sqrt{R} \rightarrow \infty$, falls $R \rightarrow \infty$)

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{iz} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{\gamma_R + \beta_R} e^{iz} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \quad (246)$$

$$= 2\pi i \sum_{y, \text{Im}(y) > 0, Q(y)=0} \text{Res}_y \left(e^{iz} \frac{P(z)}{Q(z)} \right) \quad \square \quad (247)$$

Beweis von 2.5.5: $z \in H: z = x + iy$ mit $y > 0 \Rightarrow iz = -y + ix$

$$|e^{iz}| = e^{-y} |e^{ix}| = e^{-y} < 1 \quad (248)$$

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| < \text{const} \frac{1}{R} \quad (249)$$

$$|e^{iz}| < 1 \text{ auf } \alpha_1 \text{ und } \alpha_3 \quad (250)$$

$$\left| \int_{\alpha_1} e^{iz} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| < \text{const} \frac{\sqrt{R}}{R} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty \text{ (analog für } \alpha_3) \quad (251)$$

α_2 hat die Länge $2R; z = x + iy \in \alpha_2 \Rightarrow |y| = \sqrt{R}, |z| \geq \sqrt{R}$

$$|e^{iz}| = e^{-\sqrt{R}} \quad (252)$$

$$\frac{P(z)}{Q(z)} < \frac{\text{const}}{\sqrt{R}} \quad (253)$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\alpha_2} e^{iz} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| < \frac{\text{const} e^{-\sqrt{R}} R}{\sqrt{R}} = \frac{\text{const} \sqrt{R}}{e^{-\sqrt{R}}} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty \quad \square \quad (254)$$

Beispiel:

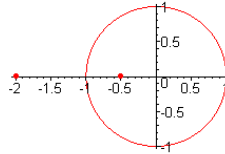
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 4 \cos x} =? \quad (255)$$

$$z = e^{it}, dz = iz dt \tag{256}$$

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \text{ mit } \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \tag{257}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 2 \underbrace{\left(e^{it} + \frac{1}{e^{it}} \right)}_{z + \frac{1}{z}}} \frac{ie^{it}}{ie^{it}} dt = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{5z + 2z^2 + 2} \tag{258}$$

Nennernullstellen: $z = -2$ und $z = -\frac{1}{2}$



Integrand hat einfache Pole bei $z = -2$ und $z = -\frac{1}{2}$. Residuensatz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{5z + 2z^2 + 2} = \text{Res}_{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2z^2 + 5z + 2} = \frac{1}{4z + 5} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} \tag{259}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 4 \cos t} = 2\pi \frac{1}{3} \tag{260}$$

Allgemeiner, nach dem gleichen Schema:

2.5.6 Regel

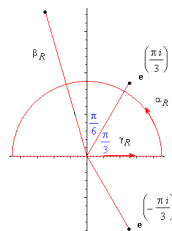
$R(X_1, X_2)$ sei eine rationale Funktion in 2 Variablen. Dann gilt:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \underbrace{R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}_{f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}} \frac{dz}{z} = 2\pi \sum_{|p|<1} \text{Res}_p \frac{f(z)}{z} \tag{261}$$

(Voraussetzung: $R(\cos t, \sin t)$ ist definiert auf dem Intervall $[0, 2\pi]$)

Beispiel:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^3} \tag{262}$$



Nullstellen von $1 + x^3$: $-1, e^{\frac{\pi}{3}i}, e^{-\frac{\pi}{3}i}$

Hauptweg: $\gamma_R = [0, R]$

Nebenweg: $\beta_R = e^{\frac{1}{3}\pi i}[R, 0]$ = der um 120 gedrehte Weg γ_R^- .

$$\text{Es gilt: } 1 + \left(xe^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^3 = 1 + x^3 \tag{263}$$

Hilfsweg: Kreisbogen, welcher γ_R und β_R verbindet. Wie oben: α_R harmlos für I.

$$\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^3} = \int_R^0 \frac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{1+x^3} dx = -e^{\frac{2}{3}\pi i} \int_0^R \frac{dx}{1+x^3} = -e^{\frac{2}{3}\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^3} \quad (264)$$

$$(1 - e^{\frac{2}{3}\pi i}) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R + \beta_R} \frac{dz}{1+z^3} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r + \alpha_R + \beta_R} \frac{dz}{1+z^3} =: J \quad (265)$$

$$\text{Residuensatz: } J = 2\pi i \text{Res}_{e^{\frac{2}{3}\pi i}} \frac{1}{1+z^3} = 2\pi i \frac{1}{3e^{\frac{2}{3}\pi i}} \quad (266)$$

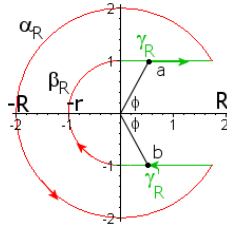
$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{J}{1 - e^{\frac{2}{3}\pi i}} = \frac{2}{3} \pi i \frac{1}{e^{\frac{2}{3}\pi i} - e^{\frac{4}{3}\pi i}} \quad (267)$$

$$= \frac{\pi}{3} \frac{1}{\frac{1}{2i} (e^{\frac{2}{3}\pi i} - e^{-\frac{2}{3}\pi i})} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \quad (268)$$

Beispiel:

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx \left(= \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x(1+x)} \right) \quad (269)$$

H: obere Halbebene, \tilde{G} : positiv geschlitzte Ebene.



$$\sqrt{} : z = re^{i\phi} \in G \mapsto \sqrt{r}e^{\frac{i\phi}{2}} \in H, 0 < \phi < 2\pi \quad (270)$$

$$R \gg 1, r = \frac{1}{R} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty \quad (271)$$

$$a = se^{i\phi} \in \gamma_R, b = se^{i(2\pi-\phi)} \in \gamma'_R \quad (272)$$

a,b gegenüberliegende Punkte auf γ_R und γ'_R mit $\text{Re}(a) = x = \text{Re}(b)$.

$$\Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{se^{\frac{i\phi}{2}}} \quad (273)$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{se^{i\pi}e^{-\frac{i\phi}{2}}} = -\sqrt{se^{-\frac{i\phi}{2}}} \quad (274)$$

$$\text{Für } R \rightarrow \infty : \sqrt{a} \rightarrow \sqrt{x} \text{ und } \sqrt{b} \rightarrow -\sqrt{x} \quad (275)$$

$$\Rightarrow I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{z}} \quad (276)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma'_R} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{z}} = \int_0^\infty \frac{dz}{-(1+z)\sqrt{z}} = I \quad (277)$$

Ferner: β_R und α_R harmlos für $\frac{1}{(1+z)\sqrt{z}}$. Integriere über den geschlossenen roten Weg $\omega_R = \gamma_R + \alpha_R + \gamma'_R + \beta_R$. Im Inneren ist nur ein Pol, an der Stelle $z = -1$.

$$\int_{\omega_R} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{z}} = 2\pi i \text{Res}_{-1} \left(\frac{1}{(1+z)\sqrt{z}} \right) = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{-1}} = 2\pi \quad (278)$$

α_R und β_R harmlos. $\int_{\gamma_R} = \int_{\gamma'_R} = I$.

$$\Rightarrow 2I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\omega_R} \frac{dz}{(1+z)\sqrt{z}} = 2\pi \Rightarrow I = \pi \quad (279)$$

Allgemeiner, mit den gleichen Wegen:

2.5.7 Regel

P, Q Polynome, $Q(x) = 0$ für $x > 0$, Grad Q - Grad $P \geq 2$. Bei $x = 0$ habe Q maximal einen Pol der Ordnung 1. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < 1$:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{y \in \tilde{G}, Q(y)=0} \operatorname{Res}_y \left(z^{\alpha} \frac{P(z)}{Q(z)} \right) \quad (280)$$

Beispiel: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$; P, Q Polynome, Grad Q - Grad $P \geq 2$, $Q(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\int_0^{\infty} R(x) \log x dx = ? \quad (281)$$

$r = \frac{1}{R}$, $R \gg 0$. Betrachte den Logarithmus $\tilde{\log}$ auf der positiv geschlitzten Ebene \tilde{G} :

$$\tilde{\log} z := \log \rho + i\phi, \text{ falls } z = \rho e^{i\phi}, 0 < \phi < 2\pi, \rho > 0 \quad (282)$$

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow r \rightarrow 0. \text{ Für } R \rightarrow \infty : \quad (283)$$

$$\tilde{\log} a \rightarrow \log x \quad (284)$$

$$\tilde{\log} b \rightarrow \log x + 2\pi i \quad (285)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} R(z) \tilde{\log} z dz = \int_0^{\infty} R(x) \log x dx \quad (286)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma'_R} R(z) \tilde{\log} z dz = - \int_0^{\infty} R(x) (\log x + 2\pi i) dx \quad (287)$$

Nach Voraussetzung über R : α_R, β_R harmlos, für $R(z) \tilde{\log} z$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\omega_R} R(z) \tilde{\log} z dz = - \int_0^{\infty} R(x) (\log x + 2\pi i) dx + \int_0^{\infty} R(x) \log x dx \quad (288)$$

$$= -2\pi i \int_0^{\infty} R(x) dx \quad (289)$$

Damit gilt:

2.5.8 Regel

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$ für $x \geq 0$, Grad Q - Grad $P \geq 2$.

$$\int_0^{\infty} R(x) dx = - \sum_{p, Q(p)=0} \operatorname{Res}_p (R(z) \tilde{\log} z) \quad (290)$$

Betrachte nun den Integranden $R(z) \tilde{\log}^2 z$

$$\text{Auf } \gamma_R : R(a) \tilde{\log}^2 a \rightarrow R(x) \log^2 x \text{ für } R \rightarrow \infty \quad (291)$$

$$\text{Auf } \gamma'_R : R(b) \tilde{\log}^2 b \rightarrow R(x) (\log^2 x + 4\pi i \log x - 4\pi^2) \quad (292)$$

Wie oben: α_R, β_R harmlos $\log^2 x$ hebt sich bei $\int_{\gamma_R} + \int_{\gamma'_R}$ weg; es bleibt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\omega_R} R(z) \tilde{\log}^2 z dz = 4\pi^2 \int_0^{\infty} R(x) dx - 4\pi i \int_0^{\infty} R(x) \log x dx \quad (293)$$

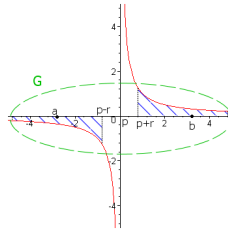
Nach 2.5.8 und Residuensatz:

2.5.9 Regel

$R(z)$ sei wie in 2.5.8. Dann gilt:

$$\int_0^{\infty} R(x) \log x \, dx = \pi i \sum_{p, Q(p)=0} \operatorname{Res}_p(R(z) \tilde{\log} z) - \frac{1}{2} \sum_{p, Q(p)=0} \operatorname{Res}_p(R(z) \tilde{\log}^2 z) \quad (294)$$

2.6 Pole auf dem Integrationsweg



$[a, b] \subseteq \mathbb{R}, a < p < b. f : [a, b] \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

$$\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty \tag{295}$$

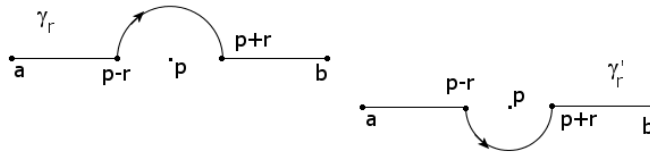
Definition: Der CAUCHY'SCHE HAUPTWERT von $\int_a^b f(x) dx$ ist

$$\mathcal{P} \int_a^b f(x) dx := \lim_{r \rightarrow 0, r > 0} \left(\int_a^{p-r} f(x) dx + \int_{p+r}^b f(x) dx \right), \tag{296}$$

falls dieser Limes existiert.

Sei nun $f(z)$ analytisch in einer offenen Umgebung G von $[a, b] \setminus \{p\}$. p sei ein Pol von f . $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t$ Strecke von a nach b .

Definition: RECHTSWERT UND LINKSWERT. $r > 0$ sei "klein".



r so klein, dass $\gamma_r, \gamma'_r \subseteq G$.

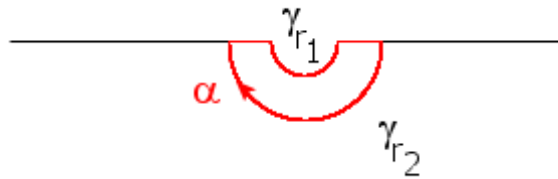
$$\Re \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_r} f(z) dz \text{ Rechtswert von } \int_{\gamma} f(z) dz \tag{297}$$

$$\mathcal{L} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma'_r} f(z) dz \text{ Linkswert von } \int_{\gamma} f(z) dz \tag{298}$$

2.6.1 Bemerkung

Die Definitionen von Rechts- und Linkswert sind unabhängig von der Wahl von r .

Beweis: (für den Linkswert) $r_1 > r_2$ "klein"



$$\int_{\gamma_{r_1}} f(z) dz + \int_{\gamma_{r_2}} f(z) dz = \int_{\alpha} f(z) dz = 0 \square \tag{299}$$

2.6.2 Satz

Sei G Gebiet, $[a, b] \subseteq G$, $p \in]a, b[$ und f sei analytisch auf $G \setminus \{p\}$; p einfacher Pol von f
 \Rightarrow Der Hauptwert von $\int_a^b f(x) dx$ existiert und es gilt:

$$\mathcal{P} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \int_a^b f(x) dx + \mathcal{R} \int_a^b f(x) dx \right) \quad (300)$$

Beweis: $g(z) = f(z)(z-p)$ analytisch auf ganz G . $r > 0$: $\alpha_r =$ der obere positiv durchlaufene Halbkreisbogen um p mit Radius r ; wähle r so, dass $\alpha_r \subseteq G$.

$$f(z) = \frac{g(z) - g(p) + g(p)}{z-p} = \frac{g(z) - g(p)}{z-p} + \frac{g(p)}{z-p} \quad (301)$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha_r} f(z) dz = \int_{\alpha_r} \frac{g(z) - g(p)}{z-p} dz + \int_{\alpha_r} \frac{g(p)}{z-p} dz \quad (302)$$

g analytisch auf G und $\frac{g(z)-g(p)}{z-p} \rightarrow g'(p)$ für $r \rightarrow 0$ ($z \in \alpha_r$)

$$\left| \int_{\alpha_r} \frac{g(z) - g(p)}{z-p} dz \right| \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow 0; \alpha_r(t) = re^{it} + p, t \in [0, \pi] \quad (303)$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\alpha_r} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\alpha_r} \frac{g(p)}{z-p} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{g(p)}{re^{it}} dt \quad (304)$$

$$= i\pi g(p) \quad (305)$$

$$\text{Res}_p \frac{g(z)}{z-p} = g(p) \quad (306)$$

Also folgt für $f = \frac{g}{z-p}$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\alpha_r} f(z) dz = i\pi \text{Res}_p f \quad (307)$$

Nach Definition es Rechtswertes:

$$\mathcal{R} \int_\gamma f(z) dz = \int_a^{p-r} f(x) dx + \int_{p+r}^b f(x) dx - \int_{\alpha_r} f(z) dz \quad (308)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P} \int_a^b f(x) dx = \mathcal{R} \int_\gamma f(z) dz + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\alpha_r} f(z) dz \quad (309)$$

$$= \mathcal{R} \int_\gamma f(z) dz + i\pi \text{Res}_p f(z) \quad \text{mit Residuensatz:} \quad (310)$$

$$\mathcal{L} \int_\gamma f(z) dz - \mathcal{R} \int_\gamma f(z) dz = \int_{|z-p|=r} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_p f(z) \quad (311)$$

$$2\mathcal{P} = 2\mathcal{R} + 2\pi i \text{Res}_p f(z) = 2\mathcal{R} + (\mathcal{L} + \mathcal{R}) = \mathcal{L} + \mathcal{R} \quad \square (312)$$

In Beweis gesehen:

2.6.3 Bemerkung

Unter der Voraussetzung von 2.6.2 gilt:

$$\mathcal{P} \int_a^b f(x) dx = \mathcal{R} \int_\gamma f(z) dz + i\pi \text{Res}_p f(z) \quad (313)$$

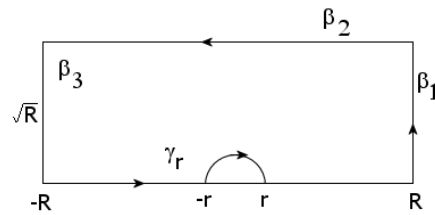
Anwendung: Zeige, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad (314)$$

$$\frac{\sin x}{x} = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix}}{x} \right) \quad (315)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{Im} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{P} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \quad (316)$$

Seien $\alpha_R = [-R, R]$, $r = \frac{1}{R}$, $\beta_R = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ gemäß folgender Zeichnung



Nach 2.5.5:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\beta_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (317)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{R} \int_{\alpha_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r + \beta_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (318)$$

$\frac{e^{iz}}{z}$ hat bei 0 einen einfachen Pol und ist sonst analytisch.

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{P} \int_{\alpha_R} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{R} \int_{\alpha_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + i\pi \operatorname{Res}_0 \frac{e^{iz}}{z} = i\pi \quad (319)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{Im}(i\pi) = \pi \quad (320)$$

3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

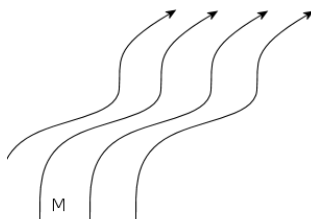
3.1 Flüsse und autonome Systeme erster Ordnung

Ein FLUSS (DYNAMISCHES SYSTEM) ist gegeben durch

1. eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ("Lage des Flusses")
2. eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, $(t, x) \mapsto \Phi(t, x)$, wobei die folgenden Axiome erfüllt sein sollen:

$$\Phi(0, x) = x \quad \forall x \in M \quad (321)$$

$$\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s+t, x) \quad (322)$$



Anschaulich: Φ beschreibt die Strömungsverhältnisse eines Flusses auf M : Ein Teilchen, welches sich auf dem Fluss bewegt und sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt x befindet, ist zum Zeitpunkt t an der Stelle $\Phi(t, x)$ angelangt. Für $x \in M$ heißt

$$\alpha_x : \mathbb{R} \rightarrow M, t \mapsto \Phi(t, x) \quad (x = \alpha_x(0)) \quad (323)$$

die FLUSSLINIE von x . $\alpha_x(\mathbb{R})$ heißt BAHN von x . Gleichung (322) erhält somit die folgende Bedeutung: Bewegen sich 2 Teilchen auf der gleichen Flusslinie, so bleibt ihr zeitlicher Abstand erhalten.

3.1.1 Eigenschaften von Flusslinien

Aus den Gleichungen (321) und (322) folgt: Ist

$$y = \alpha_x(t_0) \quad (324)$$

("y liegt auf der Bahn von x"), so ist

$$\alpha_y(t) = \alpha_x(t + t_0) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (325)$$

Insbesondere: $\text{Bahn}(x) = \text{Bahn}(y)$

Es folgt: Bahnen sind disjunkt oder gleich und

$$M = \text{disjunkte Vereinigung der Bahnen von } \Phi \quad (326)$$

3.1.2 Bemerkung

Es gibt drei Typen von Flusslinien

1. $\alpha_x = \text{const}$ ($x = \text{Gleichgewichtspunkt}$, α_x stationär)
2. α_x periodisch, d.h. α_x nicht stationär und

$$\alpha_x(t + t_0) = \alpha_x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (327)$$

3. α_x injektiv, d.h.

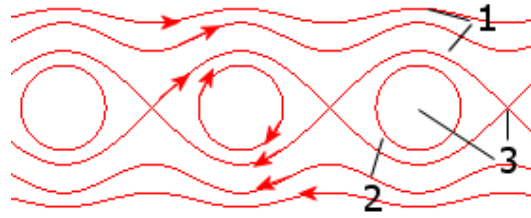
$$\alpha_x(t_1) \neq \alpha_x(t_2) \quad \text{für } t_1 \neq t_2 \quad (328)$$

("Reise ohne Wiederkehr")

Definition: Sei Φ nach t diff'bar. Das GESCHWINDIGKEITSFELD des Flusses Φ ist die Abbildung

$$v : M \rightarrow \mathbb{R}^n, p \mapsto \dot{\alpha}_p(0) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, p). \quad (329)$$

$v(p)$ = GESCHWINDIGKEITSVEKTOR der Flusslinie α_p zum Zeitpunkt $t = 0$.



1: injektiv, 2: periodisch, 3: stationär

3.1.3 Regel

$$\dot{\alpha}_p(t) = v(\alpha_p(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (330)$$

Beweis: Sei $\tau \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Setze $q = \alpha_p(\tau)$.

$$\text{z.z. } \dot{\alpha}_p(\tau) = v(\alpha_p(\tau)) = v(q) = \dot{\alpha}_q(0) \quad (331)$$

$$\text{Nach 3.1.1: } \alpha_q(t) = \alpha_p(t + \tau) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (332)$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha}_q(t) = \dot{\alpha}_p(t + \tau) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \text{ Setze } t = 0 \quad (333)$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha}_q(0) = \dot{\alpha}_p(\tau) \quad \square \quad (334)$$

Das Vektorfeld

$$v(x) = v(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ v_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (335)$$

induziert ein autonomes Differentialgleichungssystem (kurz: DGL- System) 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= v_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (336)$$

3.1.3 bedeutet in der Sprache der DGL- Systeme:

3.1.4 Korollar

Sei $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ein (nach t) diff'barer Fluss mit Geschwindigkeitsfeld v . Dann ist jede Flusslinie $\alpha = \alpha_p(t)$ ($p \in M$) eine Lösung des autonomen DGL- Systems $\dot{x} = v(x)$.

Frage: Gibt es zu dieser Aussage eine Umkehrung?

Sei nun $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf M . Betrachte das zugehörige DGL- System $\dot{x} = v(x)$, d.h.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= v_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad \text{mit } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (337)$$

Eine INTEGRALKURVE von v (Lösung von Gleichung (337)) ist eine diff'bare Kurve

$$\alpha :]a, b[\rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ mit } \dot{\alpha}(t) = v(\alpha(t)) \quad \forall t \in]a, b[\quad (338)$$

(v tangential an α). α heißt MAXIMALE LÖSUNG, falls α nicht auf ein größeres Intervall fortgesetzt werden kann. α heißt GLOBALE LÖSUNG, falls $]a, b[= \mathbb{R}$.

Beispiel: Gesehen

1. Die Flusslinien eines diff'baren Flusses sind globale Integralkurven des angehörigen Geschwindigkeitsfeldes $v: \alpha_p: \mathbb{R} \rightarrow M$ ist globale Lösung von $\dot{x} = v(x)$
2. Nicht jedes Vektorfeld besitzt globale Integralkurven

Beispiel:

$$\dot{x} = 1 + x^2; \quad v(x) = 1 + x^2 \quad (339)$$

Angenommen Gleichung (339) besitzt eine Lösung $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ die Umkehrung von $\tan:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \arctan(\alpha(t))$ definiert und diff'bar

$$\dot{\phi}(t) = \frac{1}{1 + \alpha^2(t)} \dot{\alpha}(t) = 1 \quad (340)$$

$$\Rightarrow \phi(t) = t + c \quad (341)$$

$\Rightarrow \arctan$ ist unbeschränkt $\not\Leftarrow$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Ein lokaler Fluss auf M besteht aus:

- einer offenen Teilmenge $A \subseteq (\mathbb{R} \times M)$ und
- einer Abbildung $\Phi: A \rightarrow M$ mit folgenden Eigenschaften:

$$A = \bigcup_{p \in M}]a_p, b_p[\times \{p\} \quad (342)$$

$$\Phi(0, x) = x \quad \forall x \in M \quad (343)$$

$$\Phi(s, \Phi(t, x)) \text{ definiert} \Rightarrow \Phi(s+t, x) \text{ definiert und} \quad (344)$$

$$\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s+t, x) \quad (345)$$

Flüsse sind also lokale Flüsse mit $A = (\mathbb{R} \times M)$. Wie bei Flüssen definiert man: $\alpha_p:]a_p, b_p[\rightarrow M, t \mapsto \Phi(t, p)$ heißt FLUSSLINIE durch p . Es gilt wieder: Flusslinien sind disjunkt oder gleich. Ist Φ nach t diff'bar, so heißt das Feld

$$v(p) := \dot{\alpha}_p(0) \quad (346)$$

das GESCHWINDIGKEITSFELD von Φ . Wie bei globalen Flüssen gilt:

3.1.5 Bemerkung

Für jedes $p \in M$ ist α_p eine Lösung des Systems $\dot{x} = v(x)$. Die Flusslinien eines lokalen Flusses sind also Integralkurven des DGL- Systems $\dot{x} = v(x)$.

Frage: Wann bilden die maximalen Integralkurven eines Systems $\dot{x} = v(x)$ einen lokalen Fluss?

3.1.6 Beispiel

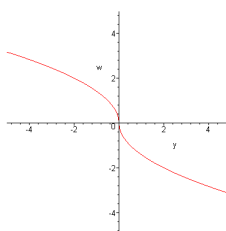
Betrachte auf dem \mathbb{R}^2 das Vektorfeld

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit} \quad (347)$$

$$v_1(x, y) = 1 \quad (348)$$

$$v_2(x, y) = \begin{cases} -\sqrt{2y} & y > 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \\ \sqrt{-2y} & y < 0 \end{cases} \quad (349)$$

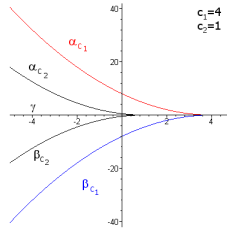
$$w = v_2(x, y) = f(y) \quad (350)$$



Das zu v gehörige DGL- System ist also

$$\begin{cases} \dot{x} &= 1 \\ \dot{y} &= v_2(x, y) = f(y) \end{cases} \quad (351)$$

$c \in \mathbb{R}$ beliebig, $p = (c, 0)$; durch $p = (c, 0)$ gehen 3 verschiedene Integralkurven von Gleichung (351)



$$\alpha_c : \begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= \begin{cases} \frac{(t-c)^2}{2} & \text{für } t < c \\ 0 & \text{für } t \geq c \end{cases} \end{cases} \quad (352)$$

$$\beta_c : \begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= \begin{cases} -\frac{(t-c)^2}{2} & \text{für } t < c \\ 0 & \text{für } t \geq c \end{cases} \end{cases} \quad (353)$$

$$\gamma_c : \begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= 0 \end{cases} \quad (354)$$

Alle Kurven α_x, β_x mit $x \leq c$ gehen durch $p = (c, 0)$. $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$ sind globale Lösungen.

Insbesondere: Die maximalen Integralkurven des Feldes v bilden keinen lokalen Fluss (sonst müssten verschiedene disjunkt sein). Mangel des Vektorfeldes v : v ist nicht diff'bar. $\frac{\partial v_2}{\partial y}$ existiert nicht an der Stelle $y = 0$ (senkrechte Tangente).

3.1.7 Satz von Picard- Lindelöf

Sei $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$, ein Lipschitz- Vektorfeld. Dann gilt:

1. Durch jeden Punkt $p \in M$ gibt es genau eine maximale Lösung

$$\alpha_p :]a_p, b_p[\rightarrow M \quad (-\infty \leq a_p < 0 < b_p \leq \infty) \quad (355)$$

des Systems $\dot{x} = v(x)$, welche die Bedingung

$$\alpha_p(0) = p \quad (356)$$

erfüllt.

2. Die maximalen Integralkurven des Systems $\dot{x} = v(x)$ bilden zusammen genommen einen diff'baren lokalen Fluss

$$\Phi : A = \bigcup]a_p, b_p[\times \{p\} \rightarrow M, \quad (t, x) \mapsto \alpha_x(t) \quad (357)$$

Sein Geschwindigkeitsfeld ist v .

Wichtiges Beispiel von Lipschitz- Vektorfeldern: v ist stetig partiell diff'bar nach x_1, \dots, x_n .

Anwendung auf autonome DGLen n - ter Ordnung ($n \geq 2$): $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Ordne f die explizite DGL zu:

$$X^{(n)} = f(X, \dot{X}, \dots, X^{(n-1)}) \quad (358)$$

Die Lösungen kann man im Prinzip durch **Übergang zum Phasenfeld** finden. Wähle für $X, \dot{X}, \dots, X^{(n-1)}$ Variable x_1, \dots, x_n (Phasenraum).

Offenbar: $x(t)$ ist eine Lösung von Gleichung (358) \Leftrightarrow Die Kurve $(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$ löst das System

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{cases}, \quad x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \ddot{x}, \dots, x_n = x^{(n-1)}, \dot{x}_n = x^{(n)} \quad (359)$$

x löst Gleichung (358) $\Leftrightarrow (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$ löst Gleichung (359). Das System (359) induziert ein Vektorfeld

$$v \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}. \quad (360)$$

v heißt PHASENFELD (-PORTRAIT) von (359). Somit besteht der folgende Zusammenhang zwischen den Lösungen von (358) und den Integralkurven des Phasenfeldes $\dot{x} = v(x)$:

3.1.8 Bemerkung

Sei $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ eine Integralkurve des Phasenfeldes

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \dot{\alpha}_n \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \end{pmatrix} \quad (361)$$

von f mit dem Anfangswert

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ für } t = 0, \text{ d.h. } \alpha(0) = (a_1, \dots, a_n) = a \quad (362)$$

Dann gilt:

1. $\alpha(t)$ ist von der Form

$$\alpha(t) = (x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \quad (363)$$

wobei $x(t)$ eine Lösung der DGL

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (364)$$

ist

- 2.

$$x(0) = a_1, \dot{x}(0) = a_2, \dots, x^{(n-1)}(0) = a_n \quad (365)$$

Umgekehrt: Jede Lösung von (358) mit Anfangsbedingung (a) induziert eine Lösung $\alpha(t) = (x(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ von (359) mit $\alpha(0) = a$. Aus 3.1.7 und 3.1.8 ergibt sich sofort:

3.1.9 Korollar

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit stetigen partiellen Ableitungen. Dann existiert zu jeder Anfangsbedingung

$$x(0) = a_1, \dot{x}(0) = a_2, \dots, x^{(n-1)}(0) = a_n \quad (366)$$

genau eine maximale Lösung $x(t)$ der DGL (358), welche die Bedingung (366) erfüllt. 3.1.8 und 3.1.9 lassen sich leicht auf nicht-autonome Systeme und Gleichungen erweitern:

3.1.10 Bemerkung

Sei $M \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig und nach x_1, \dots, x_n stetig partiell diff'bar. Dann gilt:

1. Zu jedem Punkt $(t_0, a_1, \dots, a_n) \in M$ gibt es genau eine maximale Lösung von

$$\dot{x} = v(x) \text{ mit } x(t_0) = (a_1, \dots, a_n) \quad (367)$$

2. Zu jedem Punkt $(t_0, a_1, \dots, a_n) \in M$ gibt es genau eine Lösung von

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (368)$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(t_0) = a_1, \dot{x}(t_0) = a_2, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = a_n \quad (369)$$

Erste Integrale und Erhaltungssätze

Sei $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar, $M \subseteq \mathbb{R}^n$. v induziert einen lokalen Fluss Φ von Integralkurven des zugehörigen Systems $\dot{x} = v(x)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= v_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad , \quad v = (v_1, \dots, v_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad \dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \quad (370)$$

(Erste Integrale sind Erhaltungsgrößen, d.h. Größen, welche längs der Integralkurven konstant bleiben)

Definition: Ein ERSTES INTEGRAL für v ist eine stetig diff'bare Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$, welche längs den Flusslinien von v konstant bleibt.

3.1.11 Bemerkung

Genau dann ist $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ (stetig diff'bar) ein erstes Integral von v , wenn gilt:

$$\text{grad } F \perp v, \text{ d.h.: } \langle \text{grad } F, v \rangle = 0 \quad (371)$$

Beweis: Verwende die Kettenregel: Sei $x = x(t)$ Integralkurve von v , $x(t_0) = a$:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial t}(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(a) \dot{x}_i(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(a) v_i(a) = \langle \text{grad } F, v \rangle \quad (372)$$

Also gilt: F ist konstant längs der Kurve $x(t)$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F(x)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} v_i \equiv 0 \text{ längs } t \quad (373)$$

$$\Leftrightarrow \text{grad } F \perp v \text{ längs } x \quad (374)$$

Durch jedes $a \in M$ geht eine Integralkurve von $v \Rightarrow F$ ist konstant längs jeder Integralkurve

$$\Leftrightarrow \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} v_i = 0 \text{ auf } M \quad \square \quad (375)$$

Sei nun $F \neq \text{const}$ ein erstes Integral von v .

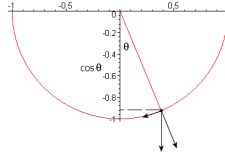
1. F zerlegt den Phasenraum M in NIVEAU- HYPERFLÄCHEN

$$N_c : F(x) = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (376)$$

2. Lösungskurven von v verlaufen jeweils in einer dieser Hyperflächen. Es folgt:

3. Man kann die Lösungen von v in diesen Räumen N_c suchen, welche eine um 1 niedrigere Dimension haben (eine Variable eliminiert). Nach endlicher Wiederholung dieses Prozesses kommt man zu eindimensionalen Räumen, in denen die Lösungen liegen. Damit sind die Lösungskurven praktisch gefunden.

Beispiel: Pendel (o.E. Länge $l = 1$, $g = 1$, $m = 1$)



$$\ddot{\theta} = -\sin \theta \text{ Pendelgleichung} \quad (377)$$

$$\text{Phasenfeld: } x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, \dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = -\sin x_1 \quad (378)$$

$$\text{Zugehöriges Vektorfeld: } v(x_1, x_2) = (x_2, -\sin x_1) \quad (379)$$

$$\text{Energieerhaltungssatz: } \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos \theta = \text{const} \quad (380)$$

Beweis: Sei $F(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1$

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } F(x_1, x_2) &= (\sin x_1, x_2) \\ v(x_1, x_2) &= (x_2, -\sin x_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{grad } F \perp v \quad (381)$$

$\Rightarrow F$ ist erstes Integral für v , d.h. $F(x_1, x_2)$ konstant längs der Flusslinien von v . $\theta = \theta(t)$
Lösung der Pendelgleichung $\Rightarrow (\theta, \dot{\theta})$ verläuft auf einer Flusslinie von v .

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos \theta = F(\theta, \dot{\theta}) = \text{const} \quad \square \quad (382)$$

Es folgt: Die Integralkurven im Phasenraum verlaufen auf den Niveauflächen gleicher Energie. Sie sind also Teilstücke der Kurven

$$\frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1 = c, \text{ d.h. } x_2 = \pm\sqrt{2}\sqrt{\cos x_1 + c} \text{ für } c \in \mathbb{R}, c \geq -1 \quad (383)$$

3.2 Lineare DGL und Systeme

Eine homogene lineare DGL n-ter Ordnung ist von der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (384)$$

Ein System von n DGL 1. Ordnung der Form

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad (385)$$

nennt man HOMOGEN und LINEAR. Dabei sind $a_0 = a_0(x), \dots, a_n = a_n(x)$ (bzw. $a_{ij} = a_{ij}(x)$) Funktionen, die auf einem Intervall $I =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ definiert sind mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Kurzschreibweise:

$$A := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \quad (386)$$

Dann schreibt sich das System (385) in der Form:

$$y' = Ay \quad (387)$$

Durch Übergang zum Phasenportrait entsteht aus Gleichung (384) ein System (385). Prinzipiell könnten wir uns also auf Systeme (385) beschränken. Aussagen über Systeme der Form (387):

Setze voraus: $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig (Im Fall (384): $a_1, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig). Dann sind die Voraussetzungen von 3.1.7 erfüllt. Ferner:

3.2.1 Satz

Die maximalen Lösungen von (385) sind auf ganz I definiert.

Beweis: Jänich, Analysis für Physiker und Ingenieure, Kapitel 8, p.189 \square

Insbesondere: A konstant $\Rightarrow I = \mathbb{R}$ wählbar \Rightarrow (385) global lösbar. Aus 3.1.10 und 3.2.1 folgt:

3.2.2 Satz vom n-dimensionalen Lösungsraum

Sei $y' = Ay$ ein lineares System (385) mit stetigen Koeffizienten $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt: Die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} := \{\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \phi' = A\phi\}, \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \quad (388)$$

von (385) ist ein n-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Genauer gilt: Für jedes x_0 aus dem Intervall I ist die Abbildung

$$\eta_{x_0} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^n, \phi \mapsto \phi(x_0) \quad (389)$$

(„Anfangswert“ bei x_0) ein Isomorphismus von \mathbb{R} -Vektorräumen („Anfangswertisomorphismus“).

Insbesondere: Zu jedem $x_0 \in I$ und jedem $y_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert genau eine Lösung $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\phi(x_0) = y_0$.

Beweis: Seien ϕ, ψ Lösungen von (385) und $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(\phi + \lambda\psi)' = \phi' + \lambda\psi' = A\phi + \lambda A\psi = A(\phi + \lambda\psi) \quad (390)$$

$\Rightarrow \phi + \lambda\psi \in \mathcal{L}$, d.h. \mathcal{L} ist ein Vektorraum.

$$(\phi + \lambda\psi)(x_0) = \phi(x_0) + \lambda\psi(x_0) = \eta_{x_0}(\phi) + \lambda\eta_{x_0}(\psi) \quad (391)$$

$\Rightarrow \eta_{x_0}$ linear.

Noch zu zeigen: η_{x_0} bijektiv

Surjektivität: Sei $y_0 \in \mathbb{R}^n$: Existenzaussage von 3.1.10: Es existiert ein $\phi \in \mathcal{L}$ mit $\phi(x_0) = y_0$, d.h. $\eta_{x_0}(\phi) = y_0$. Injektivität: Eindeutigkeitsaussage in 3.1.10:

$$\eta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0) = \psi(x_0) = \eta_{x_0}(\psi) \Rightarrow \phi = \psi \quad \square \quad (392)$$

Definition: Eine Basis $\{\Phi^1, \dots, \Phi^n\}$ des Lösungsraumes \mathcal{L} nennt man auch ein FUNDAMENTALSYSTEM (kurz: FS) von Lösungen.

3.2.3 Satz vom Fundamentalsystem

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $\{\Phi^1, \dots, \Phi^n\}$ ist ein FS für $y' = Ay$
2. $(\Phi^1(x_0), \dots, \Phi^n(x_0))$ linear unabhängig in \mathbb{R}^n
3. $(\Phi^1(x_0), \dots, \Phi^n(x_0))$ linear unabhängig für alle $x_0 \in I$
4. $\det(\Phi^1(x_0), \dots, \Phi^n(x_0)) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$
5. $\det(\Phi^1(x_0), \dots, \Phi^n(x_0)) \neq 0$ für alle $x_0 \in I$

Beweis: Für alle $x_0 \in I$ ist $\eta_{x_0} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Isomorphismus.

1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1. Ferner: $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \det(v(x_0), \dots, v^n(x_0)) \neq 0$. Daher 2 \Leftrightarrow 4 und 3 \Leftrightarrow 5 \square

Über das Phasenportrait ergeben sich die analogen Sätze für Gleichungen n-ter Ordnung.

3.2.4 Satz vom n-dimensionalen Lösungsraum für Gleichungen

Sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (393)$$

eine lineare DGL n-ter Ordnung mit stetigen Koeffizienten $a_j : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + a_1f' + a_0f = 0 \right\} \quad (394)$$

ein n-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Genau dann gilt: Die Abbildung

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^n, f \mapsto \left(f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0) \right) \quad (395)$$

ist ein Isomorphismus von \mathbb{R} -Vektorräumen für alle $x_0 \in I$. Es folgt:

3.2.5 Satz

Unter den Voraussetzungen von 3.2.4 seien f_1, \dots, f_n Lösungen von (393). Dann gilt: (f_1, \dots, f_n) bilden FS \Leftrightarrow Für alle (bzw. für ein) $x_0 \in I$ sind die Vektoren

$$\left. \begin{array}{l} \left(f_1(x_0), \dots, f_1^{(n-1)}(x_0) \right) \\ \vdots \\ \left(f_n(x_0), \dots, f_n^{(n-1)}(x_0) \right) \end{array} \right\} =: W_{f_1, \dots, f_n}. \quad (396)$$

Die von diesen n Vektoren gebildete $n \times n$ -Matrix W_{f_1, \dots, f_n} heißt WRONSKI-MATRIX von (f_1, \dots, f_n) . Es gilt also (f_1, \dots, f_n) ist FS $\Leftrightarrow \det W_{f_1, \dots, f_n} \neq 0$ für alle (bzw. für ein) $x_0 \in I$.

Inhomogene Gleichungen und Systeme

1. Eine inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung ist von der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b \quad (a_j, b : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}) \quad (397)$$

(393) nennt man die zu (397) gehörige homogene Gleichung

2. Ein inhomogenes lineares System 1. Ordnung ist von der Form

$$y' = Ay + b; \quad A = (a_{ij}), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (a_{ij}, b : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}) \quad (398)$$

(385) heißt zu (398) gehöriges homogenes System.

Wie in der Linearen Algebra gilt auch hier folgendes:

3.2.6 Satz

Die allgemeine Lösung von (398) ist von der Form

$$\psi + c_1\Phi^1 + \dots + c_n\Phi^n \quad \text{mit } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}, \quad (399)$$

wenn ψ eine Lösung von (398) ist ("spezielle" Lösung) und (Φ^1, \dots, Φ^n) ein FS von (385) ist.

Beweis: ϕ löst (398)

$$\Leftrightarrow \phi' - A\phi - b = \psi' - A\psi - b \quad (400)$$

$$\Leftrightarrow \phi' - \psi' = A\phi - A\psi \quad (401)$$

$$\Leftrightarrow (\phi - \psi)' = A(\phi - \psi) \Leftrightarrow \phi - \psi \text{ löst (393)} \quad (402)$$

\Leftrightarrow Es existieren c_1, \dots, c_n mit $\phi - \psi = c_1\Phi^1 + \dots + c_n\Phi^n \Leftrightarrow$ Es existieren c_1, \dots, c_n mit $\phi = \psi + c_1\Phi^1 + \dots + c_n\Phi^n \quad \square$

Man löst also (398) in 2 Schritten:

1. Finde FS von (385), (Φ^1, \dots, Φ^n)
2. Finde spezielle Lösung von (398), wenn FS (Φ^1, \dots, Φ^n) vorgegeben

Zu 2.: Sei ein FS (Φ^1, \dots, Φ^n) für (385) schon gefunden.

Variation der Konstanten: Lösungsansatz für (398):

$$y = u_1\Phi^1 + \dots + u_n\Phi^n \quad (403)$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen $u_i = u_i(x)$ soll (398) lösen.

Nach 3.2.3: $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^n)$ sei die $n \times n$ -Matrix mit den Spaltenvektoren Φ^1, \dots, Φ^n . Dann gilt nach 3.2.3:

$$\det \Phi(x) \neq 0 \quad \forall x \in I =]a, b[\quad (404)$$

$\Rightarrow \Phi(x)$ ist für alle $x \in I$ eine reelle $n \times n$ -Matrix $\Rightarrow y \mapsto u$ mit

$$u(x) = \Phi^{-1}(x)y(x) \quad (405)$$

ist eine invertierbare Transformation $\tilde{\Phi}$ der Abhängigen

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{in } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (406)$$

mit Rücktransformation

$$\tilde{\Phi} : u \mapsto \Phi u = y \quad (407)$$

Methode: Transformiere das System, löse das transformierte System, transformiere die Lösung zurück.

Ergebnis: Lösung des ursprünglichen Systems. Transformation des Systems:

$$y = \Phi u \Rightarrow y' = \Phi' u + \Phi u' \quad (408)$$

$$\Rightarrow y' = Ay + b \quad (409)$$

$$\Leftrightarrow \Phi' u + \Phi u' = \underbrace{A\Phi}_{\Phi'} u + b \quad (410)$$

Φ^1, \dots, Φ^n Lösungen von (385) $\Rightarrow A\Phi = \Phi'$. Also gilt:

$$y' = Ay + b \Leftrightarrow \Phi u' = b \Leftrightarrow u' = \Phi^{-1} b \quad (411)$$

Lösung:

$$u(x) = \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t)b(t) dt \quad (412)$$

Rücktransformation ergibt eine spezielle Lösung von (398):

$$y(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t)b(t) dt \quad (413)$$

3.2.7 Satz (Variation der Konstanten)

Sei $\Phi = \Phi(x)$ eine $n \times n$ - Matrix, deren Spalten ein FS von $y' = Ay$ bilden

$$\Rightarrow y(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t)b(t) dt \text{ löst } y' = Ay + b \quad (414)$$

Beispiel: ($n = 1$)

$$y' = 2xy + (2x - 1)e^x \quad (415)$$

$$A = (2x) \quad (416)$$

$$b = (2x - 1)e^x \quad (417)$$

Allgemeine Lösung von $y' = 2xy$ ist

$$\lambda e^{x^2}, \quad \Phi = (e^{x^2}) \quad (418)$$

Stammfunktion von

$$\Phi^{-1}(x)b(x) = \frac{(2x - 1)e^x}{e^{x^2}} \text{ ist } -e^{x-x^2} \quad (419)$$

\Rightarrow Spezielle Lösung von $y' = 2xy + (2x - 1)e^x$ ist

$$y = e^{x^2} (-e^{x-x^2}) = -e^x \quad (420)$$

Allgemeine Lösung von $y' = 2xy + (2x - 1)e^x$ ist

$$y = -e^x + \lambda e^{x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (421)$$

3.3 Lineare Systeme und Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

Lineare Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$A \in M(n \times n, \mathbb{R})$

$$\dot{x} = Ax \quad \left(\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, n \right) \quad (422)$$

$n = 2$: Ausführlich behandelt im 2. Semester

$$P_A = \det(\lambda E_n - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & -a_{n1} & \\ & & & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} \quad (423)$$

Seine Nullstellen $\lambda \in \mathbb{C}$ heißen die EIGENWERTE von A . $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $A \Leftrightarrow$ Es existiert ein $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $Aw = \lambda w$. w heißt zu λ gehöriger EIGENVEKTOR. $\lambda \in \mathbb{R}$: λ besitzt einen Eigenvektor $w \in \mathbb{R}^n$. P_A heißt CHARAKTERISTISCHES POLYNOM von A .

Beispiel: $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ sei symmetrisch, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$.
 $\Rightarrow A$ reell diagonalisierbar: \mathbb{R}^n hat eine Basis bestehend aus reellen Eigenvektoren von A und die Eigenwerte von A sind reell. Betrachte auch komplexe Lösungen von (422):

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n, t \mapsto \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix}; \quad \phi_j = \operatorname{Re}(\phi_j) + i\operatorname{Im}(\phi_j) \quad (424)$$

$$\dot{\phi}_j := \operatorname{Re}(\dot{\phi}_j) + i\operatorname{Im}(\dot{\phi}_j); \quad \dot{\phi} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\phi}_n \end{pmatrix} \quad (425)$$

ϕ heißt nun KOMPLEXE LÖSUNG von (422), wenn gilt:

$$\dot{\phi} = A\phi \quad (426)$$

3.3.1 Satz

Ist $w \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist

$$\phi(t) := e^{\lambda t}w = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}w_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda t}w_n \end{pmatrix} \quad (427)$$

eine Lösung von (422).

Beweis:

$$\dot{\phi}(t) = \lambda e^{\lambda t}w = e^{\lambda t}(\lambda w) = e^{\lambda t}Aw = A(e^{\lambda t}w) = A\phi(t) \quad \square \quad (428)$$

Zusatz: Seien $\lambda = \gamma + i\omega$ und $w = u + iv$ die Zerlegungen von λ bzw. w in Real- und Imaginärteil. Dann gilt:

1. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist u Eigenvektor zum Eigenwert λ und $e^{\lambda t}u$ ist eine reelle Lösung von (422)
2. Ist $w \neq 0$ (λ nicht reell), so sind u und v linear unabhängig und man hat linear unabhängige Lösungen:

$$\alpha(t) = \operatorname{Re} \phi(t) = e^{\gamma t} (u \cos \omega t - v \sin \omega t) \quad (429)$$

$$\beta(t) = \operatorname{Im} \phi(t) = e^{\gamma t} (u \sin \omega t + v \cos \omega t) \quad (430)$$

Auf diese Weise findet man immer eine reelle Lösung $\neq 0$ (P_A hat immer komplexe Nullstellen).

3.3.2 Korollar

Sei A komplex diff'bar mit einer Basis aus Eigenvektoren von A $w_1, \dots, w_r \in \mathbb{R}^n$, $u_1 \pm iv_1, \dots, u_s \pm iv_s$, $u_k, v_k \in \mathbb{R}^n$ ($r + 2s = n$) zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, $\gamma_1 \pm i\omega_1, \dots, \gamma_s \pm i\omega_s$, $\gamma_k, \omega_k \in \mathbb{R}$. Dann bilden die reellen Funktionen

$$e^{\lambda_1 t} w_1, \dots, e^{\lambda_r t} w_r \quad (431)$$

$$e^{\gamma_k t} (u_k \cos \omega_k t - v_k \sin \omega_k t) \quad (432)$$

$$e^{\gamma_k t} (u_k \sin \omega_k t + v_k \cos \omega_k t), \quad k = 1, \dots, s \quad (433)$$

ein FS von Lösungen für (422).

Beweis: Nach 3.3.1 sind dies Lösungen von (422). Setze überall $t = 0$: Erhalte $w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s$ linear unabhängig \Rightarrow Behauptung \square

Lineare DGL n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad a_j \in \mathbb{R} \quad (434)$$

Bestimmung eines FS:

Definition: Das charakteristische Polynom von (434) ist

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (435)$$

$$\frac{d}{dx} : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \phi' = \frac{d\phi}{dx} \quad (436)$$

Setze $\frac{d}{dx}$ in $P(\lambda)$ ein (für λ):

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^0 = \text{id} \quad (437)$$

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 \text{id} \quad (438)$$

Damit schreibt sich (434) in der Form:

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)(y) = 0 \quad (439)$$

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_l)^{m_l}; \quad m_1 + \dots + m_l = n, \quad m_j \geq 1 \quad (440)$$

(Fundamentalsatz der Algebra) Damit schreibt sich (434) in der Form:

$$\prod_{j=1}^l \left(\frac{d}{dx} - \lambda_j\right)^{m_j} (y) = 0 \quad (441)$$

Fazit: Die DGL (434) ist somit durch die Paare $(\lambda_1, m_1), \dots, (\lambda_l, m_l)$ eindeutig bestimmt. Also sollten sich auch die Lösungen damit ausdrücken lassen.

Problem: Berechne aus $\{(\lambda_1, m_1), \dots, (\lambda_l, m_l)\}$ ein FS von Lösungen für (434).

3.3.3 Lösungsschema

1. Schritt: Komplexe Vorstufe: Behauptung:

1. Die Funktionen

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}, \dots \\ e^{\lambda_l x}, xe^{\lambda_l x}, \dots, x^{m_l-1}e^{\lambda_l x}$$

sind \mathbb{C} -linear unabhängig

2. Sie sind Lösungen von (434)

Beweis: (1.) Es genügt zu zeigen:

3.3.4 Lemma

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Seien P_1, \dots, P_l komplexe Polynome. Es gelte

$$\sum_{j=1}^l P_j(x) e^{\lambda_j x} = 0 \quad (442)$$

Dann ist $P_1 = P_2 = \dots = P_l = 0$

Beweis: Induktion nach l :

$l = 1$: $P_1(x) e^{\lambda_1 x} = 0 \Rightarrow P_1(x) = 0 \forall x \in \mathbb{C}$

$l - 1 \rightarrow l$: ($l \geq 2$) Multipliziere obige Gleichung mit $e^{-\lambda_l x}$:

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{l-1} P_j(x) e^{(\lambda_j - \lambda_l)x} + P_l(x) = 0 \quad (443)$$

$$\deg P_l = N - 1 \Rightarrow P_l^{(N)} = 0 \quad (444)$$

Differenziere die Gleichung (443) N - mal:

$$\sum_{j=1}^{l-1} q_j(x) e^{(\lambda_j - \lambda_l)x} = 0, \text{ wobei} \quad (445)$$

$$q_j(x) = \frac{(P_j(x) e^{(\lambda_j - \lambda_l)x})^{(N)}}{e^{(\lambda_j - \lambda_l)x}} = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} P_j^{(k)}(x) (\lambda_j - \lambda_l)^{(N-k)} \quad (446)$$

Polynome. Nach Induktionsvoraussetzung ist wegen (445): $q_1 = \dots = q_{l-1} = 0$

$$\Rightarrow P_j(x) = - \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} P_j^{(k)}(x) (\lambda_j - \lambda_l)^{-k}, \quad j = 1, \dots, l - 1 \quad (447)$$

Aus Gradgründen: $P_j = 0$ für $j = 1, \dots, l - 1 \Rightarrow P_l = 0 \square$

Beweis von 3.3.3: (2.)

$$\prod_{j=1}^l \left(\frac{d}{dx} - \lambda_j \right)^{m_j} (y) = 0 \quad (448)$$

$$\lambda = \lambda_j, \quad m = m_j; \quad y = x^\mu e^{\lambda x}, \quad 0 \leq \mu < m \quad (449)$$

Wegen (441)=(448) genügt zu zeigen:

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda \right)^m (x^\mu e^{\lambda x}) = 0 \quad (450)$$

$\Rightarrow y$ Lösung von (441). Induktion nach μ :

$$\mu = 0 \quad : \quad \left(\frac{d}{dx} - \lambda \right) (e^{\lambda x}) = \lambda e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} = 0 \quad (451)$$

$$\mu - 1 \rightarrow \mu \quad : \quad \left(\frac{d}{dx} - \lambda \right)^m (x^\mu e^{\lambda x}) = \left(\frac{d}{dx} - \lambda \right)^{m-1} (\mu x^{\mu-1} e^{\lambda x}) \quad (452)$$

$$= \mu \left(\frac{d}{dx} - \lambda \right)^{m-1} (x^{\mu-1} e^{\lambda x}) = 0 \quad \square \quad (453)$$

2. Schritt: Reelle Lösungen

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die reellen Nullstellen von P mit Vielfachheiten m_1, \dots, m_r ,

$\gamma_1 \pm i\omega_1, \dots, \gamma_s \pm i\omega_s$ die nicht reellen Nullstellen von P mit Vielfachheiten n_1, \dots, n_s .

Nach Schritt 1 gilt (Übergang zu Real- und Imaginärteil der Lösungen):

$$e^{\lambda_k x}, x e^{\lambda_k x}, \dots, x^{m_k-1} e^{\lambda_k x}, \quad k = 1, \dots, r \quad (454)$$

$$\left. \begin{array}{l} x^j e^{\gamma_k} \cos \omega_k x \\ x^j e^{\gamma_k} \sin \omega_k x \end{array} \right\} 0 \leq j < n_k, \quad k = 1, \dots, s \quad (455)$$

sind reelle Lösungen von (434), \mathbb{R} -linear unabhängig. Ihre Anzahl ist n , also formen sie ein FS von Lösungen zu (434)

3.3.5 Spezielle Inhomogenitäten

Sei $P(\lambda)$ wie oben. Betrachte

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)(y) = f(x)e^{\mu x} \quad (456)$$

$f(x)$ komplexes Polynom, $\deg f = k \geq 0$, $\mu \in \mathbb{C}$. Nachdem die homogene DGL (434) mit Hilfe von 3.3.4 gelöst ist:

Suche spezielle Lösung von (456). Sei

$$m = \begin{cases} 0 & \text{falls } P(\mu) \neq 0 \\ \text{Vielfachheit der Nullstelle } \mu & P(\mu) = 0 \end{cases} \quad (457)$$

m gibt an, wie oft der Faktor $\frac{d}{dx} - \lambda$ in der DGL (448) vorkommt. Wende zunächst die Faktoren $\frac{d}{dx} - \lambda_j$ von $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ an auf Terme der Form $x^\nu e^{\mu x}$ mit $\nu \in \mathbb{N}_0$.

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_j\right) \left(\underbrace{x^\nu}_{\text{Vorfaktor}} e^{\mu x}\right) = (\mu x^\nu e^{\mu x} + \nu x^{\nu-1} e^{\mu x} - \lambda_j x^\nu e^{\mu x}) \quad (458)$$

$$= \underbrace{((\mu - \lambda_j)x^\nu + \nu x^{\nu-1})}_{\text{Vorfaktor}} e^{\mu x} \quad (459)$$

2 Fälle treten auf:

$\lambda_j = \mu$ Grad des Vorfaktors erniedrigt sich um 1, falls $\nu \geq 1$

$\lambda_j \neq \mu$ Grad des Vorfaktors bleibt erhalten.

Es folgt:

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)(x^{m+j} e^{\mu x}) = g_j(x) e^{\mu x} \quad \forall j = 0, \dots, k, \quad (460)$$

wobei $g_j(x)$ Polynome mit $g_j(x) \neq 0$, $\deg g_j(x) = j$, denn der 1. Fall tritt genau m -mal auf.

Fazit: Die g_0, \dots, g_k bilden eine Basis des \mathbb{C} -Vektorraumes der komplexen Polynome vom Grad $\leq k$.

Insbesondere: Das Polynom $f(x)$ schreibt sich in der Form

$$f(x) = b_0 g_0(x) + b_1 g_1(x) + \dots + b_k g_k(x) \quad \text{mit } b_j \in \mathbb{C} \quad (461)$$

Diese Zahlen b_j ergeben sich aus g_0, \dots, g_k durch Lösung eines linearen Gleichungssystems. Es gilt nun:

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)((b_0 x^m + \dots + b_k x^{m+k}) e^{\mu x}) \quad (462)$$

$$= b_0 P\left(\frac{d}{dx}\right)(x^m e^{\mu x}) + \dots + b_k P\left(\frac{d}{dx}\right)(x^{m+k} e^{\mu x}) \quad (463)$$

$$= \underbrace{(b_0 g_0(x) + \dots + b_k g_k(x))}_{f(x)} e^{\mu x} \quad (464)$$

Fazit: Die Funktion $y = (b_0 x^m + \dots + b_k x^{m+k}) e^{\mu x}$ löst die DGL (456), komplexe Lösung

Reelle Anwendung: y wie oben komplexe Lösung

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)(\operatorname{Re} y) = \operatorname{Re}(f(x)e^{\mu x}) \quad (465)$$

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)(\operatorname{Im} y) = \operatorname{Im}(f(x)e^{\mu x}) \quad (466)$$

\Rightarrow Man erhält somit Lösungen von Gleichungen der Form

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)(y) = r(x) \quad \text{mit } r(x) \in \{f(x), f(x)e^{\mu x}, f(x) \sin \mu x, f(x) \cos \mu x\}, \quad (467)$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $f(x) \in \mathbb{R}[x]$.

3.4 Rand- und Eigenwertaufgaben

Randwertaufgaben

$J = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$. Betrachte DGL 2. Ordnung der Form

$$Ly = 0, \quad Ly = b(x), \quad \text{mit } Ly = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y, \quad (468)$$

wobei $a_0, a_1, a_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sein sollen. Es soll gelten:

$$a_2(x) \neq 0 \quad \forall x \in J \quad (469)$$

Die Lösungen von $Ly = 0$ entsprechen dann den Lösungen von

$$y'' + \frac{a_1}{a_2}(x)y' + \frac{a_0}{a_2}(x)y = 0. \quad (470)$$

Indem man den Definitionsbereich der a_j auf ein offenes Intervall $]a', b'[\supseteq J$ ausdehnt, erhält man nach dem Existenz- und Eindeigkeitssatz:

3.4.1 Bemerkung

1. Die Gleichung $Ly = 0$ hat Lösungen, die auf ganz J definiert sind (nach 3.2.1)
2. Durch Angabe von $y(a)$ und $y'(a)$ (Anfangswert im Phasenraum) (oder auch von $y(x_0)$ und $y'(x_0)$ für ein beliebiges $x_0 \in [a, b]$) ist eine maximale Lösung $y = y(x)$ von $Ly = 0$ eindeutig festgelegt.

Wir betrachten die Situation im erweiterten Phasenraum mit den Koordinaten y, y', x .

3.4.2 Bemerkung

Sei \mathcal{L} ein Vektorraum der maximalen Lösungen von (468). Dann gilt: Für jeden Zeitpunkt $x_0 \in [a, b]$ hat man einen "Anfangswertisomorphismus" $A_{x_0} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $y \mapsto (y(x_0), y'(x_0)) =$ Durchstoßpunkt der Integralkurve (y, y') durch die Ebene $x = x_0$ (Folgt aus 3.2.2). Die Flusslinien transportieren im Verlauf der Zeit $b - a$ die Ebene $x = a$ auf die Ebene $x = b$. Man erhält somit eine Abbildung $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $p = (y(a), y'(a), a) \rightarrow q = (y(b), y'(b), b)$.

3.4.3 Bemerkung

τ ist ein Isomorphismus von \mathbb{R} - Vektorräumen, der sog. TRANSPORTISOMORPHISMUS von \mathcal{L} .

Beweis: $A_b : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $A_a^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}$ sind Isomorphismen nach 3.4.2, also auch $\tau = A_b \circ A_a^{-1} \square$

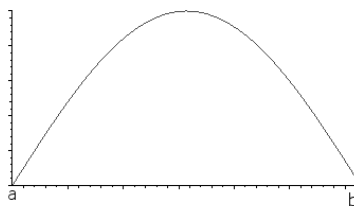
Insbesondere: τ bildet Geraden durch Null auf Geraden durch Null ab.

Eine Randwertaufgabe (kurz: RW- Aufgabe) besteht grob gesprochen darin, Lösungen von $Ly = 0$ zu finden, welche zu den Zeiten $x = a$ und $x = b$ gewisse Bedingungen erfüllen. Nach 3.4.2: 2 "linear unabhängige" Bedingungen zur Zeit a legen die Lösung schon fest. Es können dann keine Bedingungen für b mehr gestellt werden.

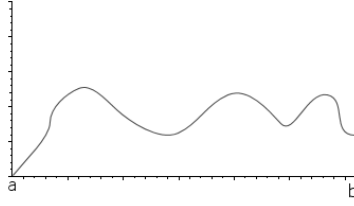
Deshalb: Stelle jeweils eine Bedingung zu Anfang und Ende.

Beispiele:

$$y(a) = y(b) = 0 \quad (471)$$



$$y(a) = 0, \quad y'(b) = 0 \quad (472)$$



Allgemeiner betrachten wir lineare Bedingungen:

$$\alpha y(a) + \tilde{\alpha} y'(a) = 0 \quad (473)$$

$$\beta y(b) + \tilde{\beta} y'(b) = 0; (\alpha, \tilde{\alpha}), (\beta, \tilde{\beta}) \neq (0, 0) \text{ fest} \quad (474)$$

Mit anderen Worten: Man fordert:

$$p = \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{pmatrix} \text{ liegt auf Geraden } V_a : \alpha Y_1 + \tilde{\alpha} Y_2 = 0 \quad (475)$$

$$q = \begin{pmatrix} y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} \text{ liegt auf Geraden } V_b : \beta Y_1 + \tilde{\beta} Y_2 = 0 \quad (476)$$

Endgültige Formulierung:

Definition: Eine homogene RW- Aufgabe für die Gleichung $Ly = 0$ ist gegeben durch zwei Geraden V_a und V_b in \mathbb{R}^2 durch den Nullpunkt. Die Aufgabe besteht darin, eine Lösung $y = y(x) \neq 0$ zu finden, welche auf der Geraden V_a beginnt und auf V_b endet, d.h. $(y(a), y'(a)) \in V_a$ und $(y(b), y'(b)) \in V_b$. Wir werden sehen: im Allgemeinen ist dies nicht möglich (man hat nur die triviale Lösung $y \equiv 0$)

3.4.4 Bemerkung

(siehe obige Skizze) Sei eine RW- Aufgabe ($Ly = 0; V_a; V_b$) gegeben. Es gibt 2 Möglichkeiten:

1. $\tau(V_a) \neq V_b$: Dann existiert nur die triviale Lösung
2. $\tau(V_a) = V_b$: Bis auf einen konstanten Faktor existiert genau eine Lösung $\neq 0$. Das RW- Problem hat einen eindimensionalen Lösungsraum.

Beweis: y löst die RW- Aufgabe $\Leftrightarrow Ly = 0, A_a(y) \in V_a, A_b(y) \in V_b \Leftrightarrow Ly = 0$ und $A_b(y) \in V_b \cap A_b \circ A_a^{-1}(V_a) = V_b \cap \tau(V_a)$. Da τ ein Isomorphismus ist und $\dim V_a = \dim V_b = 1$:

$$\dim(V_b \cap \tau(V_a)) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \tau(V_a) \neq V_b \\ 1 & \tau(V_a) = V_b \end{cases} \quad \square \quad (477)$$

Berechnung einer Lösung des RW- Problems ($Ly = 0; V_a, V_b$). Sei ein FS (ϕ_1, ϕ_2) der DGL $Ly = 0$ gegeben: $y = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2$ beliebige Lösung von $Ly = 0$. y löst das RW- Problem:

$$\left. \begin{aligned} \alpha y(a) + \tilde{\alpha} y'(a) &= 0 \\ \beta y(b) + \tilde{\beta} y'(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (478)$$

$\Leftrightarrow (c_1, c_2)$ ist Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$(\alpha \phi_1(a) + \tilde{\alpha} \phi_1'(a))c_1 + (\alpha \phi_2(a) + \tilde{\alpha} \phi_2'(a))c_2 = 0 \quad (479)$$

$$(\beta \phi_1(b) + \tilde{\beta} \phi_1'(b))c_1 + (\beta \phi_2(b) + \tilde{\beta} \phi_2'(b))c_2 = 0 \quad (480)$$

Dieses Gleichungssystem ist im Allgemeinen nur trivial lösbar.

Spezialfall: $V_a : Y_1 = 0, V_b : Y_1 = 0$. RW- Problem nicht-trivial lösbar \Leftrightarrow Die Gleichungen

$$\phi_1(a)c_1 + \phi_2(a)c_2 = 0 \quad (481)$$

$$\phi_1(b)c_1 + \phi_2(b)c_2 = 0 \quad (482)$$

in den Unbekannten c_1, c_2 sind linear abhängig

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \phi_1(a) & \phi_2(a) \\ \phi_1(b) & \phi_2(b) \end{pmatrix} = 0 \quad (483)$$

Analog definiert man INHOMOGENE RW- AUFGABEN: Ersetze V_a und V_b durch beliebige Geraden (nicht durch Null).

Randeigenwertprobleme

Sei Ly wie in (468) definiert über $J = [a, b]$. Gegeben: Geraden $V_a, V_b \in \mathbb{R}^2$ durch 0.

Definition: Die zur RW- Aufgabe ($Ly = 0; V_a, V_b$) gehörige EIGENWERTAUFGABE (kurz: EW- Aufgabe) ist gegeben durch

$$Ly + \lambda y = 0; V_a; V_b \quad (\lambda \in \mathbb{R} \text{ variabel}) \quad (484)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ heißt EIGENWERT von (484), wenn mit diesem λ die RW- Aufgabe ($Ly + \lambda y = 0; V_a, V_b$) eine nicht triviale Lösung hat (, d.h. $-\lambda$ ist ein Eigenwert des linearen Operators L im Sinne der linearen Algebra). Die zum Eigenwert λ gehörige nicht trivialen Lösungen heißen EIGENFUNKTIONEN von (484) zum Eigenwert λ .

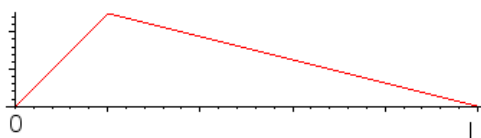
Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ hat man gemäß 3.4.3 einen zum Operator $\tilde{L}y := Ly + \lambda y$ gehörigen Transportisomorphismus $\tau_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Es gilt offenbar:

3.4.5 Bemerkung

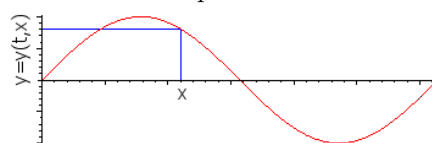
λ ist ein Eigenwert von (484) $\Leftrightarrow \tau_\lambda(V_a) = V_b$.

Beispiel: Die schwingende Saite mit Länge $l > 0$:

$y = y(t, x) := y$ - Koordinate der Saite in Abhängigkeit von Ort und Zeit.



Gezupfte Saite



Momentaufnahme zum Zeitpunkt t .

Die (klassische) Physik lehrt uns: $y(t, x)$ erfüllt eine eindimensionale Wellengleichung:

$$\ddot{y} = a^2 y'' \quad \text{mit } \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad (485)$$

Randbedingung (Einspannbedingung): $y(t, 0) = y(t, l) = 0$ für alle Zeiten t .

Problem: Gestalt und Geschwindigkeit der Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ bekannt: $y(0, x) = f(x)$, $\dot{y}(0, x) = g(x)$ bekannt.

Frage: Wie schwingt die Saite weiter?

Vereinfachte Fragestellung: Welche Lösungen hat

$$\ddot{y} = a^2 y'', \quad y(t, 0) = y(t, l) = 0 \quad \forall t ? \quad (486)$$

Separationsansatz: $y(t, x) = \phi(x)\psi(t) \Rightarrow$ Die Wellengleichung erhält die einfachere Gestalt

$$\phi(x)\ddot{\psi}(t) = a^2 \phi''(x)\psi(t) \quad (487)$$

Wenn $\phi(x) \neq 0$ und $\psi(t) \neq 0$ in einer Umgebung von (t, x) :

$$\frac{\ddot{\psi}}{a^2 \psi} = \frac{\phi''}{\phi} = -\lambda \in \mathbb{R} \text{ konstant,} \quad (488)$$

da linke Seite nur von t und rechte Seite nur von x abhängig. Eine Funktion $y(t, x) = \phi(x)\psi(t)$, welche der DGL $\ddot{y} = a^2 y''$ genügt, erfüllt die DGL:

$$\ddot{\psi} + \lambda a^2 \psi = 0 \quad \text{und} \quad (489)$$

$$\phi'' + \lambda \phi = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (490)$$

Umgekehrt: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ gefunden mit (489) und (490).

$$\Rightarrow \phi \ddot{\psi} = -\lambda a^2 \phi \psi = a^2 \phi'' \psi \quad (491)$$

$\Rightarrow y(t, x) = \phi(x)\psi(t)$ erfüllt die DGL $\ddot{y} = a^2 y''$. Die Einspannbedingungen sind erfüllt, falls $\phi(0) = \phi(l) = 0$. λ heißt SEPARATIONSPARAMETER, falls (489), (490) und $\phi(0) = \phi(l) = 0$ gelten. Lösungen von (486) erhält man also folgendermaßen:

1. Löse die zu (490) gehörige EW- Aufgabe $\phi'' + \lambda\phi = 0$; $\phi(0) = 0$; $\phi(l) = 0$
2. Löse die DGL (489) für jeden Eigenwert λ von (490).

Zu 1.: $\phi'' + \lambda\phi = 0 \rightarrow$ Charakteristisches Polynom $P(T) = T^2 + \lambda$. Nullstellen von $P(T)$: $\pm\sqrt{-\lambda}$ oder 0 (doppelt).

Reelles FS: $\{f_1, f_2\}$

	$\lambda < 0$	$\lambda = 0$	$\lambda > 0$
f_1	$e^{\sqrt{-\lambda}x}$	1	$\cos \sqrt{\lambda}x$
f_2	$e^{-\sqrt{-\lambda}x}$	x	$\sin \sqrt{\lambda}x$

Allgemeine Lösung von (490): $\phi = c_1 f_1 + c_2 f_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. RW- Problem $\phi'' + \lambda\phi = 0$, $\phi(0) = \phi(l) = 0$ ist nicht-trivial lösbar

$$\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \phi(0) &= c_1 f_1(0) + c_2 f_2(0) = 0 \\ \phi(l) &= c_1 f_1(l) + c_2 f_2(l) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ hat Lsg. } (c_1, c_2) \neq (0, 0) \quad (492)$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} f_1(0) & f_2(0) \\ f_1(l) & f_2(l) \end{pmatrix} = 0 \quad (493)$$

$$\lambda < 0: \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (l \neq 0) \quad \nexists \quad (494)$$

$$\lambda = 0: \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{pmatrix} = l \neq 0 \quad \nexists \quad (495)$$

$$\lambda > 0: \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda}l & \sin \sqrt{\lambda}l \end{pmatrix} = \sin \sqrt{\lambda}l = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (496)$$

Fazit: Die Eigenwerte von (490) sind die Zahlen $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Bestimmung der Eigenfunktionen zu den Eigenwerten λ_n :

$\cos \frac{n\pi}{l}x$, $\sin \frac{n\pi}{l}x$ ist ein FS zu $\phi'' + \lambda_n \phi = 0$. Die RW- Aufgabe $\phi'' + \lambda_n \phi = 0$ hat somit einen eindimensionalen Lösungsraum. $\sin \frac{n\pi}{l}x$ ist Lösung der RW- Aufgabe. $\Rightarrow \phi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x$ ist Basis der Eigenfunktionen zum Eigenwert λ_n .

Zu 2.: Berechnung des zeitabhängigen Faktors zum Eigenwert λ_n :

$$\ddot{\psi} + \lambda_n a^2 \psi = 0 \quad (497)$$

hat das charakteristische Polynom $P(T) = T^2 + \lambda_n a^2$. Wie oben folgt: Die allgemeine Lösung von (497) ist

$$a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t, \quad \text{mit } \omega_n = \frac{n\pi}{l}a, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \quad (498)$$

Insgesamt hat der Separationsansatz ergeben: Die Funktionen

$$y(t, x) = (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\omega_n}{a} x \quad (499)$$

mit $\omega_n = \frac{n\pi}{l}a$ und $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ beliebig, $n \in \mathbb{N}$ erfüllen die DGL (487) und die Einspannbedingungen. Linearkombinationen und sogar "konvergente" Reihen solcher Lösungen sind wieder Lösungen:

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \phi_n(x) \quad (500)$$

Zurück zum ursprünglichen Problem: Seien neben den Einspannbedingungen auch noch Anfangsbedingungen $f(x) = y(0, x)$ und $g(x) = \dot{y}(0, x)$ vorgegeben. Wie findet man

Lösungen (500), welche auch noch diese Bedingungen erfüllen?
Kann man $(a_n), (b_n)$ finden, so dass

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (501)$$

so ist (500) mit diesen a_n und b_n eine Lösung von (486), welche die vorgegebenen Anfangsbedingungen $y(0, x) = f(x)$, $\dot{y}(0, x) = g(x)$ erfüllt. Entwicklung ist z.B. möglich, falls g und f stückweise stetig diff'bar sind.

3.4.6 Satz

Sei f auf dem Intervall $0 \leq x \leq l$ stückweise stetig diff'bar. Dann stellt die Sinusreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (502)$$

an allen Stellen, wo f stetig ist, die Funktion f dar.

Siehe dazu: JÄNICH, Mathematik für Physiker, 13; FOSTER, Analysis I, 23; ...

3.5 Die Sturm- Liouville- Aufgabe

$J = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$ und $a_0(x), a_1(x), a_2(x) : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. $a_2(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. $V_a, V_b \subseteq \mathbb{R}^2$ Geraden durch Null ("Randbedingungen"). Betrachte dazu die lineare Abbildung $L : C^2(J) \rightarrow C^0(J)$, $y \mapsto a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y$. Betrachte die zu den Daten $(Ly + \lambda y = 0; V_a; V_b)$ gehörige EW- Aufgabe.

Interpretation im Sinne der linearen Algebra:

- L ist eine \mathbb{R} - lineare Abbildung, $C^2(J) \subseteq C^0(J)$
- λ ist Eigenwert der EW- Aufgabe $\Leftrightarrow \exists y \neq 0$ mit $Ly = (-\lambda)y$ und $y = y(x)$ erfüllt die Randbedingung $(y(a), y'(a)) \in V_a$, $(y(b), y'(b)) \in V_b$. Dies bedeutet: $(-\lambda)$ ist Eigenwert der linearen Abbildung L im Sinne der linearen Algebra.

Von allgemeinem Interesse ist das folgende Entwicklungsproblem (siehe Beispiel der schwingenden Saite):

Unter welchen "günstigen" Voraussetzungen an $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ hat L "hinreichend viele" Eigenwerte? (Die Entwicklung nach Eigenfunktionen sollte für "gute" Funktionen möglich sein)

Kandidaten: "Selbstadjungierte" Operatoren L bzgl. eines geeigneten Skalarproduktes (auf $C^0(J)$).

Analoges Problem im \mathbb{R}^n :

Sei A $n \times n$ - Matrix. $A \rightsquigarrow$ lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \mapsto Av$.

Sei $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ das gewöhnliche Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n .

3.5.1 Definition

L heißt SELBSTADJUNGIERT, wenn

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad (503)$$

In der linearen Algebra lernt man:

- L selbstadjungiert $\Leftrightarrow A$ symmetrische Matrix
- Ist A symmetrisch, so besitzt \mathbb{R}^n eine Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n , welche aus Eigenvektoren von A (L) besteht:

$$v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j, |v_i| = 1 \quad \forall i \quad (504)$$

$Av_i = \lambda_i v_i$ mit einem $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit $i \in \mathbb{N}$. Jedes $v \in \mathbb{R}^n$ schreibt sich dann als $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$.

$$\Rightarrow \langle v, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \alpha_i v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle = \alpha_j \quad (505)$$

$$\Rightarrow v = \sum_{k=1}^n \langle v, v_k \rangle v_k \quad (506)$$

Auf $C^2(J)$ hat man das Skalarprodukt

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_a^b \phi(x)\psi(x)dx \quad (507)$$

Frage: Wann hat L bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ "gute" Eigenschaften?

3.5.2 Lemma

Seien $\phi, \psi \in C^2(J)$ und $a_2(x) \in C^1(J)$.

$$\Rightarrow \langle L\phi, \psi \rangle - \langle \phi, L\psi \rangle = \int_a^b (a_2' - a_1) \det \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \phi' & \psi' \end{pmatrix} dx - \left[a_2 \det \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \phi' & \psi' \end{pmatrix} \right]_a^b \quad (508)$$

Beweis: (partielle Integration)

$$(a_2\phi'\psi)' = a_2\phi'\psi' + a_2'\phi'\psi \quad (509)$$

$$\langle a_2\phi', \psi \rangle = [a_2\phi'\psi]_a^b - \int_a^b a_2'\phi'\psi dx - \int_a^b a_2\phi'\psi' dx \quad (510)$$

$$\langle \phi, a_2\psi'' \rangle = [a_2\phi\psi']_a^b - \int_a^b a_2'\phi\psi' dx - \int_a^b a_2\phi'\psi' dx \quad (511)$$

$$\begin{aligned} \langle L\phi, \psi \rangle - \langle \phi, L\psi \rangle &= \langle a_2\phi'', \psi \rangle + \langle a_1\phi'', \psi \rangle - \langle \phi, a_2\psi'' \rangle - \langle \phi, a_1\psi' \rangle \\ &= [a_2(\phi'\psi - \phi\psi')]_a^b + \int_a^b a_2'(\phi\psi' - \phi'\psi) dx - \int_a^b a_1(\phi\psi' - \phi'\psi) dx \\ &= \int_a^b (a_2' - a_1) \det \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \phi' & \psi' \end{pmatrix} dx - \left[a_2 \det \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \phi' & \psi' \end{pmatrix} \right]_a^b \quad \square \end{aligned} \quad (512)$$

Von nun an: $a_2(x) \in C^1(J)$, $a_2(x) \neq 0 \forall x \in J$.

3.5.3 Bemerkung

Seien $\phi, \psi \in C^2(J)$, welche die Randbedingungen V_a, V_b erfüllen. Dann gilt:

$$\left[a_2 \det \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \phi' & \psi' \end{pmatrix} \right]_a^b = 0 \quad (513)$$

Somit gilt nach 3.5.2 unter dieser Voraussetzung:

$$\langle L\phi, \psi \rangle - \langle \phi, L\psi \rangle = \int_a^b (a_2' - a_1) \det \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \phi' & \psi' \end{pmatrix} dx \quad (514)$$

Beweis: $\dim V_a = 1$, $(\phi(a), \phi'(a)) \in V_a$ und $(\psi(a), \psi'(a)) \in V_a \Rightarrow \det \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \phi' & \psi' \end{pmatrix} = 0$.

Analoges für b anstelle von a \Rightarrow Behauptung \square

Falls also $a_2'(x) = a_1(x)$ ist, gilt

$$\langle L\phi, \psi \rangle - \langle \phi, L\psi \rangle = 0 \quad (515)$$

für ϕ, ψ , welche die Randbedingungen erfüllen. Man definiert daher: L ist FORMAL SELBST-ADJUNGIERT, wenn $a_2'(x) = a_1(x)$. Dann:

$$Ly = a_2y'' + a_2'y' + a_0y = (a_2y')' + a_0y \quad (516)$$

Es gilt also:

3.5.4 Bemerkung

L ist formal selbstadjungiert $\Leftrightarrow Ly = (p(x)y')' + q(x)y$, wobei $p(x) \in C^1(J)$, $p(x) \neq 0$ für alle $x \in J$, $q(x) \in C^0(J)$. Betrachte den Fall $p(x) > 0$ (Analog: $p(x) < 0$). Nach 3.5.2 und 3.5.3 gilt nun:

3.5.5 Bemerkung

Ist L formal selbstadjungiert, so gilt die SELBSTADJUNGIERTHEITSBEDINGUNG

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L\psi \rangle \quad \forall \phi, \psi, \quad (517)$$

welche die Randbedingungen V_a und V_b erfüllen.

Ist L formal selbstadjungiert, so nennt man die EW- Aufgabe ($Ly + \lambda y = 0$; $V_a; V_b$) eine

STURM- LIOUVILLE- AUFGABE.

Allgemeiner: Sei noch ein $r \in C^0(J)$, $r(x) > 0$ vorgegeben.

Definition: $(Ly + \lambda r(x)y = 0; V_a; V_b)$ heißt STURM- LIOUVILLE- AUFGABE (kurz: SL- Aufgabe) mit Gewichtsfunktion $r(x)$, falls L formal selbstadjungiert.

Zeige: Jede EW- Aufgabe ist äquivalent zu einer SL- Aufgabe mit Gewichtsfunktion:

Rückführung einer beliebigen EW- Aufgabe zu einer SL- Aufgabe mit Gewichtsfunktion

3.5.6 Satz

Sei L wie zu Beginn, $a_2(x) \in C^1(J)$ und $a_2(x) > 0$. Dann geht die EW- Aufgabe $(Ly + \lambda y = 0; V_a; V_b)$ durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor $r(x) > 0$ über in eine SL- Aufgabe mit Gewichtsfunktion:

$$((rL)y + \lambda ry = 0; V_a; V_b) \quad (518)$$

D.h. rL ist formal selbstadjungiert.

Beweis: $\frac{a_1 - a_2'}{a_2} \in C^0(J)$, besitzt also eine Stammfunktion $s(x)$. Setze

$$r(x) := e^{s(x)} \Rightarrow r' = s'e^s = s'r = \frac{a_1 - a_2'}{a_2} r \quad (519)$$

$$\Rightarrow (a_2 r)' = a_2 r' + a_2' r = (a_1 - a_2') r - a_2' r = a_1 r \quad (520)$$

$$\Rightarrow (rL)y = r(Ly) = r(a_2 y'' + a_1 y' a_0 y) = (a_2 r) y'' + (a_2 r)' y' + (a_0 r) y \quad (521)$$

$$= ((a_2 r) y')' + (a_0 r) y, \quad (522)$$

d.h. rL ist formal selbstadjungiert \square .

Fazit: Anstatt von beliebigen EW- Aufgaben kann man auch SL- Aufgaben mit Gewichtsfunktion betrachten: $r > 0$, L wie oben, formal selbstadjungiert bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$$Ly + \lambda ry = 0; V_a; V_b \quad (523)$$

Gesucht:

- Eigenwerte von (523). Das sind diejenigen $\lambda \in \mathbb{R}$, für die (523) eine nicht triviale Lösung hat.
- Zu jedem EW λ eine Eigenfunktion, also eine Lösung y von (523) mit $y(a) \in V_a$ und $y(b) \in V_b$, $y \neq 0$. Diese Lösung ist dann auch eine Lösung der zugehörigen EW- Aufgabe

$$\tilde{L}y + \lambda y = 0; V_a; V_b, \text{ wobei } \tilde{L} = \frac{L}{r} \quad (524)$$

Beachte: \tilde{L} im Allgemeinen nicht mehr formal selbstadjungiert bzgl. des gewöhnlichen Skalarproduktes

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_a^b \phi(x) \psi(x) dx \quad (525)$$

Beispiel: $Ly = (1 - x^2)y'' - 2xy' + my$ ist formal selbstadjungiert $((1 - x^2)' = -2x)$ auf $J = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$$r = 1 + x : \tilde{L}y = \frac{L}{1+x}y = (1-x)y'' - \frac{2x}{1+x}y' + \frac{m}{1+x}y \quad (526)$$

ist nicht formal selbstadjungiert.

Mit dem modifizierten Skalarprodukt

$$\langle \phi, \psi \rangle_r := \int_a^b \phi(x) \psi(x) r(x) dx \quad (527)$$

gilt aber:

3.5.7 Bemerkung

\tilde{L} erfüllt bzgl. Funktionen $\phi, \psi \in C^0(J)$, welche die Randbedingung erfüllen, die Selbstadjungiertheitsbedingung:

$$\langle \tilde{L}\phi, \psi \rangle_r = \langle \phi, \tilde{L}\psi \rangle_r \quad (528)$$

Beweis:

$$\langle \tilde{L}\phi, \psi \rangle_r = \langle r\tilde{L}\phi, \psi \rangle = \langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L\psi \rangle = \langle \phi, \tilde{L}\psi \rangle_r \quad \square \quad (529)$$

Was weiß man über die Gesamtheit aller Lösungen der Aufgabe (523)?

3.5.8 Satz (Lineare Eigenschaften)

1. Die Eigenwerte von (523) sind immer reell, selbst wenn man a priori komplexe Eigenwerte zulässt.
2. Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten stehen bzgl. des modifizierten Skalarproduktes aufeinander senkrecht.
3. Die Eigenräume sind eindimensional

Beweis:

1. Sei $\lambda = \gamma + i\omega$, mit $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$, ein komplexer EW von (523) und $y = u + iv$ eine zugehörige Eigenfunktion, d.h.

$$L(u + iv) + (\gamma + i\omega)r(u + iv) = 0 \quad (530)$$

mit $u + iv \neq 0$ erfüllt die reellen Randbedingungen V_a und V_b . Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt

$$Lu + \gamma ru - \omega rv = 0 \quad (531)$$

$$Lv + \gamma rv + \omega ru = 0 \quad (532)$$

L ist formal selbstadjungiert bzgl. des Skalarproduktes und u, v erfüllen die Randbedingung

$$\stackrel{5.5}{\Rightarrow} \langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle \quad (533)$$

$$\text{Wegen (531),(532): } \langle \gamma ru - \omega rv, v \rangle = \langle u, \gamma rv + \omega ru \rangle \quad (534)$$

$$\Rightarrow \omega (\langle u, u \rangle_r + \langle v, v \rangle_r) = 0, \quad u + iv \neq 0 \quad (535)$$

$$\Rightarrow \omega = 0 \Rightarrow \lambda = \gamma \in \mathbb{R} \quad (536)$$

2. Sei $L\phi = -\lambda r\phi$ und $L\psi = -\mu r\psi$ mit $\lambda \neq \mu$. Zu zeigen:

$$\langle \phi, \psi \rangle_r = 0 \quad (537)$$

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L\psi \rangle \quad (538)$$

$$\Rightarrow \lambda \langle \phi, \psi \rangle_r = \mu \langle \phi, \psi \rangle_r \quad (539)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle \phi, \psi \rangle_r = 0 \quad (540)$$

$$\Rightarrow \langle \phi, \psi \rangle_r = 0 \Rightarrow \phi \perp_r \psi \quad (541)$$

3. Betrachte den Anfangswertisomorphismus $A_a : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi \mapsto (\phi(a), \phi'(a)) \in V_a$ (ϕ Eigenfunktion von (523) zum EW λ) $A_a(\phi) \in V_a \Rightarrow \phi \in A_a^{-1}(V_a) = W_a$, $\dim V_a = 1$, A_a Isomorphismus $\Rightarrow \dim A_a^{-1} = 1$, $A_a(V_a) = 1 \Rightarrow$ Behauptung \square

Weitere Fakten über die Lösungen einer SL- Aufgabe (Beweis siehe Jänich)

3.5.9 Satz

Die Eigenwerte einer SL- Aufgabe mit Gewichtsfunktion bilden eine unendliche Folge $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ im Fall $a_2(x) > 0$ (im Fall $a_2(x) < 0$: $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = -\infty$).

Beispiel: Schwingende Saite:

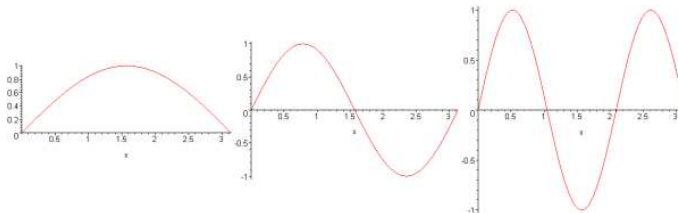
$$\lambda_n = \frac{(n+1)^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (542)$$

3.5.10 Oszillationssatz

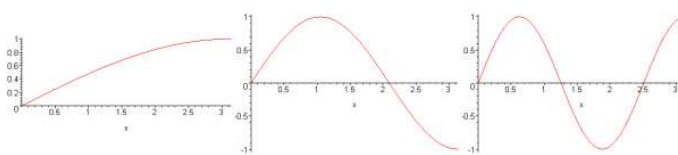
Seien $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ wie in 3.5.9 die Eigenwerte einer SL- Aufgabe mit Gewichtsfunktion. Dann hat die Eigenfunktion ϕ_n zum Eigenwert λ_n im offenen Intervall $]a, b[$ n Nullstellen ($n = 0, 1, \dots$).

Beispiele für V_a und V_b (qualitative "Bilder"):

$$V_a : \phi(a) = 0, V_b : \phi(b) = 0$$



$$V_a : \phi(a) = 0, V_b : \phi'(b) = 0$$



Entwicklungsprobleme:

- Welche Funktionen $f(x)$ auf dem Intervall $J = [a, b]$ lassen sich entwickeln in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k(x) \quad (543)$$

- Bei welchem Begriff von "Konvergenz"
- Wie beschreibt man die Koeffizienten c_k ?

Nach 3.5.8: Bei geeigneter Normierung bilden die Funktionen ϕ_0, ϕ_1, \dots ein Orthonormalsystem bzgl. des gewichteten Skalarproduktes, d.h.

$$\langle \phi_k, \phi_j \rangle_r = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = j \\ 0 & \text{für } k \neq j \end{cases} \quad (544)$$

Falls also eine Entwicklung (543) von f existiert und das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$ gliedweise auf die Reihe angewendet werden kann, so erhält man

$$\langle f, \phi_j \rangle_r = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k, \phi_j \right\rangle_r = \sum_k c_k \langle \phi_k, \phi_j \rangle_r = c_j \quad (545)$$

$$c_j = \int_a^b f(x) \phi_j(x) r(x) dx \quad (546)$$

Es gilt:

3.5.11 Satz (Gleichmäßig konvergente Entwicklung nach Eigenfunktionen)

Sei $f(x)$ stetig und stückweise stetig diff'bar auf $J = [a, b]$. An den Rändern gelte $f(a) = 0$, falls $\phi_0(a) = 0$, und $f(b) = 0$, falls $\phi_0(b) = 0$. Dann ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle_r \phi_k(x) \quad (547)$$

Die Konvergenz der Reihe ist absolut und gleichmäßig.

Allgemeiner gilt: Sei $L_r^2(J)$ = Raum der (bzgl. r) quadratisch- integrablen Funktionen. Ist nun $f \in L_r^2(J)$, so konvergiert die Reihe (547) gegen f im quadratischen Mittel, d.h

$$\text{Ist } \delta_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^n \langle f, \phi_k \rangle_r \phi_k(x), \quad (548)$$

$$\text{so gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \delta_n^2(x) r(x) dx = 0 \quad (549)$$

4 Spezielle Funktionen der Physik

4.1 Gleichungen, die aus Separationsansatz stammen

LAPLACE- OPERATOR:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \text{ wenn } \psi = \psi(x, y, z) \quad (550)$$

Beispiele partieller DGL 2. Ordnung:

$$\text{Die Wellengleichung} \quad \Delta\psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, (\psi = \psi(x, y, z, t)) \quad (551)$$

$$\text{Wärmeleitungsgleichung} \quad \Delta\psi = \frac{1}{\chi} \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (552)$$

$$\text{Schrödingergleichung} \quad \Delta\Psi - \frac{2m}{\hbar^2} V(x, y, z)\Psi = -\frac{2im}{\hbar} \frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (553)$$

Diese Gleichungen sind alle von der Form $T\Psi = a\dot{\Psi}$ bzw. $T\Psi = a\ddot{\Psi}$, $a \in \mathbb{R}$, wobei der Operator T von der Form $T = \Delta - V$, $V = V(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y, z)$ Ortsvektor, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Betrag von \vec{r} . Gesucht werden Funktionen $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$, welche den obigen Gleichungen $T\Psi = a\dot{\Psi}$ bzw. $T\Psi = a\ddot{\Psi}$ genügen. Daneben sind noch gewisse Randbedingungen zu berücksichtigen.

Standardmethode: Man führt die Gleichung durch Separation der Variablen auf gewöhnliche DGL zurück.

A. Trennung von Raum- und Zeitkoordinate

T sei ein linearer partieller Differentialoperator in der Ortskoordinate. Betrachte DGL der Form $T\Psi = a\dot{\Psi}$ bzw. $T\Psi = a\ddot{\Psi}$.

$$\text{Separationsansatz: } \Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\alpha(t) \quad (554)$$

$$\Rightarrow T(\psi\alpha) = a \frac{d\psi\alpha}{dt} \Leftrightarrow (T\psi)\alpha = a\psi\dot{\alpha} \quad (555)$$

$$\Leftrightarrow \frac{T\psi}{\psi} = a \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = -E: \text{ Separationskonst.} \quad (556)$$

$$\text{Entsprechend } T\Psi = a\ddot{\Psi} \Leftrightarrow \frac{T\psi}{\psi} = a \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -E \quad (557)$$

Daraus resultieren 2 DGL:

1. Eine Gleichung in t :

$$\dot{\alpha} + \frac{E}{a}\alpha = 0 \quad \left(\text{bzw. } \ddot{\alpha} + \frac{E}{a}\alpha = 0 \right) \quad (558)$$

Diese gewöhnliche DGL löst man mit den Methoden aus Kapitel 3.

2. Eine zeitunabhängige Gleichung:

$$T\psi + E\psi = 0 \quad (559)$$

Im Fall $T = \Delta - V$ mit $V = V(\vec{r})$, $E = \text{const}$

$$\Delta\psi + (E - V)\psi = 0 \quad (560)$$

Problem: Wie wählt man das Koordinatensystem (kurz: KoSy) für eine weitere Separation der Ortsvariablen?

Die Antwort hängt ab von speziellen V und von eventuellen Randbedingungen.

Beispiel: (2- dimensionale Situation)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad V = V(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r \quad (561)$$

Betrachte die Gleichung $\Delta\psi + r\psi = 0$

Ansatzversuch: $\psi(x, y) = f(x)g(y)$. Eine nichttriviale Lösung der DGL dieser Art führt zu

$$\frac{f''}{f}(x) + \frac{g''}{g}(y) + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \quad (562)$$

auf einem kleiner Quadrat $Q \subseteq \mathbb{R}^2$, auf dem $f(x)g(y) \neq 0$ ist.

Beweis:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x)g(y), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = f(x)g''(y) \quad (563)$$

$$\frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \psi}{f(x)g(y)} = 0 \quad \square \quad (564)$$

Die Beziehung (562) kann aber nicht gelten

Beweis: Angenommen (562) gelte auf Q . Durch Verkleinerung von Q erreicht man $f(x) \neq 0, g(y) \neq 0, x \neq 0, y \neq 0, \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$ für alle $(x, y) \in Q$. Sei $H(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0 \text{ auf } Q \quad (565)$$

Andererseits gilt wegen (562):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{f''}{f}(x) + \frac{g''}{g}(y) \right) = 0 \quad \ddagger \quad (566)$$

Also führt der Ansatz $\psi(x, y) = f(x)g(y)$ nur zur trivialen Lösung $\psi \equiv 0 \quad \square$

B. Separation in Polarkoordinaten

$\Delta =$ Laplace- Operator, $V = V(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y, z)$

$$\Delta\psi + (E - V)\psi = 0 \quad (E = \text{const.}) \quad (567)$$

Setze noch voraus: V soll nicht von z abhängen. Dann lässt sich (ähnlich wie in Teil A) z abseperieren. Danach befinden wir uns im 2- dimensionalen Fall:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \Delta\psi + (E - V)\psi = 0 \quad (568)$$

Dabei ist $\psi = \psi(x, y) = \psi(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Setze noch voraus: $V = V(\vec{r})$ (Im Beispiel: $E = 0, V = -r$). Führe auf \mathbb{R}^2 Polarkoordinaten ein:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad (569)$$

(r, ϕ) heißen POLARKOORDINATEN von \vec{r} . Schreibe Δ in Polarkoordinaten um:

$$\left. \begin{array}{l} x = x(r, \phi) = r \cos \phi \\ y = y(r, \phi) = r \sin \phi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \phi \\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \phi \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} = -r \sin \phi \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} = r \cos \phi \end{array} \right. \quad (570)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} \quad (571)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = -r \sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} \quad (572)$$

$$f = f(x, y) = f(r \cos \phi, r \sin \phi) \quad (573)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \phi, r \sin \phi) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \phi, r \sin \phi) \frac{\partial y}{\partial r}$$

Es folgt: In Polarkoordinaten schreibt sich Δ in der Form

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (574)$$

Verifikation durch Einsetzen von (562) in der rechten Seite. Setze nun $\psi(x, y) = \psi(x(r, \phi), y(r, \phi))$ an in der Form $f(r)Y(\phi)$. Die Gleichung $\Delta\psi + (E - V)\psi = 0$ transformiert sich dann in die Gleichung

$$\frac{1}{r}(rf')'Y + \frac{1}{r^2}fY'' + (E - V)fY = 0 \quad | * \frac{r^2}{fY} \quad (575)$$

$$\Rightarrow \frac{r^2(f'' + \frac{1}{r}f' + (E - V)f)}{f} = -\frac{Y''}{Y} = \text{const.} = \lambda \in \mathbb{R} \quad (576)$$

Daraus resultieren 2 Gleichungen

1. Gleichung in der Winkelvariablen ϕ :

$$Y'' + \lambda Y = 0 \quad (577)$$

Hier sind nur periodische Lösungen mit Periode 2π zugelassen, da ϕ nur modulo 2π durch (x, y) bestimmt ist. Nach Kapitel 3: $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Allgemeine Lösung:

$$Y = c_1 \cos n\phi + c_2 \sin n\phi, \quad \lambda = n^2, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (578)$$

2. Radiale Gleichung:

$$f'' + \frac{1}{r}f' + \left(E - V - \frac{n^2}{r^2}\right)f = 0 \quad (579)$$

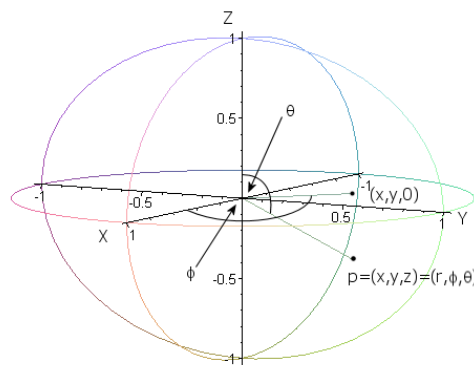
Im Spezialfall $V \equiv 0$, $E = 1$ heißt die entsprechende radiale Gleichung

$$f'' + \frac{1}{r}f' + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right)f = 0 \quad (580)$$

die BESSEL'SCHE DGL. Ihre Lösungen heißen ZYLINDERFUNKTIONEN (sie sind auf jedem Zylinder um die z - Achse konstant).

C. Separation in Kugelkoordinaten (3-dim. Fall)

Nun sei auch zugelassen, dass $V = V(x, y, z)$ von x , y und z abhängt. $\vec{r} = (x, y, z)$ Ortsvektor, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = d(0, \vec{r}) = |\vec{r}|$. Betrachte die Kugel $|\vec{r}| = r = \text{const.}$ Sei $p = p(x, y, z)$ ein Punkt auf der Kugel mit Radius r . p ist festgelegt durch seine "geographische Breite und Länge".



xy - Ebene = Äquatorialebene

ϕ : Winkel von (x, y) gegen die x - Achse (in Äquatorialebene)(geographische Länge)

θ : Winkel zwischen r und z - Achse (geographische Breite)

Die KUGELKOORDINATEN von p sind dann (r, ϕ, θ) .

Betrachte: Räumliche Gleichung der Form

$$\Delta\psi + (E - V)\psi = 0 \quad (581)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad V = V(\vec{r}), \quad r = |\vec{r}|, \quad E = \text{const} \quad (582)$$

Separationsansatz: $\psi(r, \phi, \theta) = f(r)Y(\phi, \theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $r \geq 0$. Transformiere Δ in Kugelkoordinaten (\rightarrow s. Jänich)

Ergebnis:

$$r^2 \Delta = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (583)$$

Einsetzen in die obige Gleichung (581) ergibt durch Separation von r und (ϕ, θ) zwei Gleichungen:

1. Kugelflächenfunktionengleichung:

$$\left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y + \lambda Y = 0 \quad (584)$$

(mit einem Parameter λ) und

2. Radiale Gleichung:

$$(r^2 f')' + (r^2(E - V(r)) - \lambda)f = 0 \quad (585)$$

Zu 1.: Die Lösungen $Y = Y(\phi, \theta)$ sind Funktionen auf der 2-Sphäre (Oberfläche der Kugel mit Radius 1) $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, da Y nicht von r abhängt (sog. Kugelfunktion).

Kurze Schreibweise: für die Gleichung (584):

$$\Delta_{S^2} Y + \lambda Y = 0 \quad (586)$$

Δ_{S^2} heißt auch LAPLACE- OPERATOR auf der Sphäre.

Separation von geographischer Länge und Breite: Separationsansatz:

$$Y(\phi, \theta) = \Phi(\phi)\Theta(\theta) \quad (587)$$

Setze ein in Gleichung (584):

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \Phi'' \Theta + \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \Theta')' \Phi + \lambda \Phi \Theta = 0 \quad (588)$$

$$\Rightarrow -\frac{\Phi''}{\Phi} = \sin \theta \frac{(\sin \theta \Theta')'}{\Theta} + \lambda \sin^2 \theta = \mu = \text{const} \quad (589)$$

Es resultieren zwei Gleichungen:

- 1.

$$\Phi'' + \mu \Phi = 0; \quad (590)$$

da $\Phi = \Phi(\phi)$ periodisch mit Periode 2π sein muss, ergibt sich wie oben: $m = 0, 1, 2, \dots$. Daraus ergibt sich für $\Theta(\theta)$ zum Parameter $\mu = m^2$ die Gleichung

- 2.

$$\sin^2 \theta \Theta'' + \sin \theta \cos \theta \Theta' + (\lambda \sin^2 \theta - m^2) \Theta = 0 \quad (591)$$

Variablentransformation: $\zeta = \cos \theta :]0, \pi[\rightarrow]-1, 1[$, $\Theta(\theta) = u(\cos \theta)$; dabei ist $u(\zeta)$ definiert auf dem Intervall $] -1, 1[$. Kettenregel liefert:

$$\Theta' = -\sin \theta u' \quad (592)$$

$$\Theta'' = -\cos \theta u' - \sin \theta u'' (-\sin \theta) = -\cos \theta u' + \sin^2 \theta u'' \quad (593)$$

Einsetzen in (591): $(\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \zeta^2)$

$$(1 - \zeta)^2 u'' - 2\zeta u' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - \zeta^2} \right) u = 0 \quad (594)$$

Gleichung definiert auf dem Intervall $] -1, 1[$.

Definition: Diese Gleichung heißt LEGENDRE- DGL.

$\zeta = \cos \theta$; $\theta = 0$ ("Nordpol") $\hat{=} \zeta = 1$, $\theta = \pi$ ("Südpol") $\hat{=} \zeta = -1$.

Es ergeben sich daraus folgende Bedeutungen an die Lösungen der Legendre DGL. Durch Rücktransformation sollte eine "vernünftige" Kugelflächenfunktion entstehen, d.h. sie sollte auch im Nord- und Südpol definiert sein. Für die Randpunkte $\zeta = \pm 1$ sollte die Lösung u konvergieren und 2 mal stetig diff'bar sein. Später werden wir sehen: Diese Bedingung ist nur erfüllbar, wenn $\lambda = l(l+1)$ und $l \geq m > 0$ beide ganze Zahlen sind. Diese λ heißen auch die EIGENWERTE der Legendre DGL.

Zu 2.: Setze $\lambda = l(l+1)$ in die radiale Gleichung ein:

$$(r^2 f')' + (r^2(E - V(r)) - l(l+1))f = 0 \quad (595)$$

Spezialfall: $V = 0, E = 1$: Setze nun $w = \sqrt{r}f$. Transformierte Gleichung in w :

$$w'' + \frac{1}{r}w' + \left(1 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2}\right)w = 0, \quad l \in \mathbb{N} \quad (596)$$

(die sog. halbzahlige Besselgleichung)

Zusammenfassung: Durch Separation von partiellen linearen DGL 2. Ordnung sind wir auf folgende gewöhnliche DGL gestoßen:

1. Radiale Gleichungen

(a) Ebener Fall: Bessel'sche DGL:

$$f'' + \frac{1}{r}f' + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right)f = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (597)$$

(b) Räumlicher Fall: Halbzahlige Besselgleichung

$$w'' + \frac{1}{r}w' + \left(1 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2}\right)w = 0, \quad l \in \mathbb{N} \quad (598)$$

2. Die allgemeine Legendre DGL

$$(1 - \zeta^2)u'' - 2\zeta u' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - \zeta^2}\right)u = 0, \quad \lambda = l(l+1), \quad l, m \in \mathbb{N} \quad (599)$$

Diese Gleichungen sind sämtlich von der Bauart

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0, \quad (600)$$

wobei die $p(z)$ und $q(z)$ analytische Funktionen auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ sind (Hier: $U = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$)

4.2 Gewöhnliche DGL im Komplexen (1)

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, $p(z)$, $q(z)$ analytisch auf G . Betrachte die DGL

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad (601)$$

Gesucht: Analytische Funktionen $w : U \rightarrow \mathbb{C}$, mit $U \subseteq G$, welche die Gleichung (601) erfüllen.

Beispiel: Fasse die allgemeine Legendre DGL als DGL für komplexe Funktionen auf:

$$p(z) = -\frac{2z}{1-z^2}, \quad q(z) = \frac{\lambda}{1-z^2} - \frac{m^2}{(1-z^2)^2} \quad (602)$$

sind analytisch auf $G = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$. Eigentlich gesucht sind reelle Funktionen auf dem Intervall $] - 1, 1[$ mit "gutem" Randverhalten.

Methode: Finde komplexe Lösung auf $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $] - 1, 1[\subseteq U$, so dass deren Einschränkung auf $] - 1, 1[$ das gewünschte Randverhalten hat.

A. DGL auf der Kreisscheibe ohne Singularität

Wie im Reellen gilt auch hier ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

4.2.1 Satz

Seien $p(z)$ und $q(z)$ analytisch auf einer offenen Kreisscheibe K . Sei $z_0 \in K$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ beliebig. Es gilt:

1. Die Gleichung (601) hat genau eine analytische Lösung $w : K \rightarrow \mathbb{C}$ mit den Anfangswerten $w(z_0) = \alpha$, $w'(z_0) = \beta$.
2. Sei \mathcal{L}_K die Menge aller analytischen Lösungen auf K und $z_0 \in K$ beliebig $\Rightarrow \mathcal{L}_K \rightarrow \mathbb{C}^2$, $w \mapsto (w(z_0), w'(z_0))$ ist ein \mathbb{C} -Vektorraum-Isomorphismus. Insbesondere besitzt \mathcal{L}_K eine Basis (w_1, w_2) . Die allgemeine Lösung von (601) ist dann:

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad (603)$$

4.2.2 Lösungen von (601) durch Potenzreihenansatz

z_1 Mittelpunkt von K . Schreibe p , q und w als Potenzreihen in $(z - z_1)$:

$$p(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (z - z_1)^l, \quad q(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l (z - z_1)^l \quad (604)$$

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z - z_1)^n, \quad w'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) u_{n+1} (z - z_1)^n \quad (605)$$

$$w''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} (z - z_1)^n \quad (606)$$

Setze diese Potenzreihen in die Gleichung (601) ein und erhalte

$$w'' + pw' + qw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_1)^n \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow c_n = 0 \quad (607)$$

$$0 = c_0 = 2u_2 + u_1 a_0 + u_0 b_0 \quad (608)$$

$$\text{Für } n \geq 1 : 0 = c_n = (n+2)(n+1)u_{n+2} + \sum_{k+l=n} (k+1)u_{k+1}a_l + \sum_{k+l=n} u_k b_l \quad (609)$$

Es folgt:

$$u_2 = -\frac{1}{2}(u_1 a_0 + u_0 b_0) \quad (610)$$

$$u_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)}(\dots) \quad (611)$$

Also berechnen sich die unbekanntes u_2, u_3, \dots rekursiv aus u_0 und u_1 . Ferner:

$$w(z_1) = u_0, w'(z_1) = u_1 \quad (612)$$

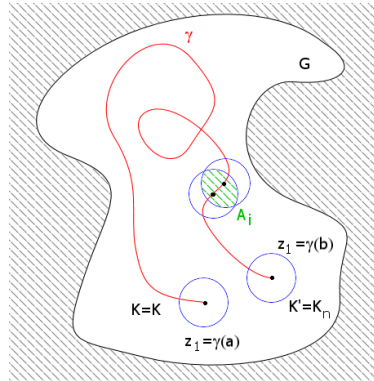
Nach 4.2.1.2 erhält man ein FS (w_1, w_2) auf K , wenn man obige Rekursion durchführt in den Fällen $u_0 = 1, u_1 = 0 \rightsquigarrow w_1$ und $u_0 = 0, u_1 = 1 \rightsquigarrow w_2$.

4.3 Nachtrag zu 2.4

4.3.1 Identitätssatz

Seien $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $A \subseteq G$ eine Teilmenge, welche mindestens einen Häufungspunkt hat. Dann gilt: Ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in A$, so ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ eine Kurve. Eine Kreiskette in G längs γ ist gegeben durch eine Unterteilung $a = t_0 < \dots < t_n = b$ von $[a, b]$ und Radien $r_i > 0, i = 0, \dots, n$, so dass gilt:

- Die Kreisscheiben $K_i : |z - \gamma(t_i)| < r_i$ liegen alle in G
- $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq K_{i-1} \cap K_i$



Definition: Seien $K, K' \subseteq G$ Kreisscheiben um $\gamma(a)$ bzw. $\gamma(b)$. $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : K' \rightarrow \mathbb{C}$ sind analytisch. Man sagt, dass g aus f durch analytische Fortsetzung längs γ entsteht, wenn es eine Kreiskette $K = K_0, \dots, K_i, \dots, K_n = K'$ längs γ gibt und analytische Funktionen $f = f_0 : K_0 \rightarrow \mathbb{C}, \dots, f_k : K_k \rightarrow \mathbb{C}$ und $g = f_n : K_n \rightarrow \mathbb{C}$, so gilt: f_i und f_{i-1} stimmen auf $A_i = K_i \cap K_{i-1}$ überein, $i = 1, \dots, n$.

4.3.2 Satz (Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung)

Seien $K, K' \subseteq G$ Kreisscheiben wie oben, $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann existiert maximal eine analytische Fortsetzung $g : K' \rightarrow \mathbb{C}$ von f längs γ auf K' .

Beweis: Seien $f = f_0, \dots, f_n = g$ wie oben mit

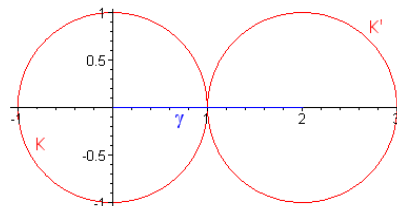
$$f_{i-1} |_{A_i} = f_i |_{A_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (A_i = K_i \cap K_{i-1}) \tag{613}$$

Zeige, dass f_i durch f_{i-1} eindeutig bestimmt ist, somit rekursiv auch $g = f_n$ durch $f = f_0$. Die Menge $A_i \subseteq K_i$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt. Also folgt mit 4.3.1: Es gibt maximal eine analytische Funktion $f_i : K_i \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f_i |_{A_i} = f_{i-1} |_{A_i}$ (Noch zu zeigen wäre die Unabhängigkeit von g von der gewählten Kreiskette) \square

4.3.3 Bemerkung

Nicht jede analytische Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ lässt sich längs γ auf K analytisch fortsetzen.

Beispiel: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ analytisch auf $K : |z| < 1, \gamma = [0, 2], K' : |z - 2| < 1$



$f(z) = \frac{1}{1-z}$ in $K \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1} |f(z)| = \infty \Rightarrow f$ ist nicht längs γ auf K' fortsetzbar.

4.3.4 Bemerkung

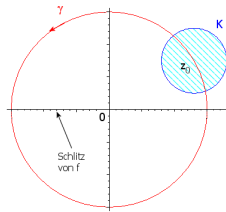
Sei $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ Stammfunktion einer auf ganz G definierten analytischen Funktion h , d.h. $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist analytisch und $f' = h|_K$. Dann lässt sich f längs jeder Kurve $\gamma \in G$ analytisch fortsetzen. Das Endergebnis $g : K' \rightarrow \mathbb{C}$ dieser Fortsetzung ist dann ebenfalls Stammfunktion von $h|_{K'}$.

Beweis: Sei $K = K_0, \dots, K_n = K' \subseteq G$ eine Kreiskette längs γ . Setze $f_0 = f : K_0 \rightarrow \mathbb{C}$. Definiere $f_1 : K_1 \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f_1|_{K_0 \cap K_1} = f_0|_{K_0 \cap K_1}$. Nach Cauchy gilt: $h|_K$ besitzt eine Stammfunktion $\tilde{f}_1 : K_1 \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow f_1 := \tilde{f}_1 - f_1(\gamma(a)) + f_0(\gamma(a))$ ist ebenfalls eine Stammfunktion von $h|_{K_1}$ und $f_1(\gamma(a)) = f_0(\gamma(a)) \Rightarrow f_0|_{A=K_0 \cap K_1}$ ist Stammfunktion von $h|_A$. $f|_A$ ebenfalls. $f_0(\gamma(a)) = f_1(\gamma(a)) \Rightarrow f_0 - f_1 = \text{const}$ auf A . Es folgt: $f_0|_A = f_1|_A$. Iterativ erhält man eine Folge $f = f_0, \dots, f_n$ analytischer Funktionen $f_j : K_j \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f_{j-1}|_{A_j} = f_j|_{A_j}, f'_j = h|_{A_j}, j = 1, \dots, n \square$

Insbesondere: $g = f_n : K' = K_n \rightarrow \mathbb{C}$ analytische Fortsetzung von f auf K längs γ mit $g' = h|_{K'}$

Beachte: Ist γ geschlossen und $K = K'$, so ist in obiger Situation im Allgemeinen $g \neq f$.

Beispiel: $h(z) = \frac{1}{z}$ ist auf $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytisch. Sei $z_0 \in G$ und $\gamma =$ Kreis durch z_0 mit Mittelpunkt 0 . $K \subseteq G$ Kreisscheibe um z_0 . $f(z) = \log z$ bezeichnet einen auf K definierten Zweig des Logarithmus (Def: Geschlitzte Ebene)



4.3.5 Bemerkung

$f(z)$ längs γ fortsetzbar zu analytischen Funktion $g : K_n = K \rightarrow \mathbb{C}$ und $g'(z) = \frac{1}{z}$ auf K . Beim Überschreiten des Schlitzes ist aus Gründen der Stetigkeit zum nächsten Zweig des Logarithmus zu wechseln. Es folgt:

$$g(z) = f(z) + 2\pi i \quad \forall z \in K \quad (614)$$

Man kann zeigen:

4.3.6 Satz

1. Ist G einfach zusammenhängend (z.B. sternförmig), so gilt: Lässt sich $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ längs jeden Weges in G fortsetzen, so ist f die Einschränkung einer analytischen Funktion auf ganz G (Insbesondere in der Situation von 4.3.4 $g = f$)
2. Sei G eine punktierte Kreisscheibe mit Mittelpunkt ζ und γ ein konzentrischer Kreis in G , $K \subseteq G$ wie oben. $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ sei analytisch und habe zusätzlich folgende Eigenschaften:
 - (a) $f(z)$ ist in G längs jeden Weges analytisch fortsetzbar.
 - (b) Die Fortsetzung von f längs γ führt zu $f_n = f$ zurück.

Dann ist f die Einschränkung einer analytischen Funktion auf G .

Insbesondere: $f(z)$ hat eine Laurent- Reihen- Entwicklung um ζ , welche auf ganz G konvergiert.

4.4 Gewöhnliche DGL im Komplexen (2)

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad (615)$$

mit $p(z), q(z)$ analytisch auf G . $K \subseteq G$ Kreisscheibe:

$$\mathcal{L}_K = \mathbb{C}w_1 \oplus \mathbb{C}w_2 \quad (616)$$

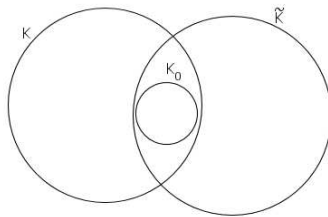
B. Fortsetzung von Lösungen längs Wegen

Seien $K, \tilde{K} \subseteq G$ Kreisscheiben, $\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_{\tilde{K}}$ die Lösungsräume von (615) auf K bzw. \tilde{K}

4.4.1 Satz

Sei $K \cap \tilde{K} \neq \emptyset$ und $w(z) \in \mathcal{L}_K \Rightarrow$

1. Ist $\tilde{w} : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch mit $w|_{K \cap \tilde{K}} = \tilde{w}|_{K \cap \tilde{K}}$. Dann ist $\tilde{w} \in \mathcal{L}_{\tilde{K}}$
2. Es gibt genau ein $\tilde{w} \in \mathcal{L}_{\tilde{K}}$ mit $w|_{K \cap \tilde{K}} = \tilde{w}|_{K \cap \tilde{K}}$



Beweis: Wähle $K_0 \subseteq K \cap \tilde{K}$ mit Mittelpunkt z_0 .

1. Für $z \in \tilde{K}$ setze

$$f(z) := \tilde{w}''(z) + p(z)\tilde{w}'(z) + q(z)\tilde{w}(z) \quad (617)$$

Für $z \in K_0 \subseteq K \cap \tilde{K}$ ist $f(z) = w''(z) + p(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0$. Identitätssatz

$$\Rightarrow f(z) = 0 \quad \forall z \in \tilde{K}, \text{ d.h. } \tilde{w} \in \mathcal{L}_{\tilde{K}} \quad (618)$$

2. Wende 4.2.1 auf \tilde{K} an: Es gibt genau ein $\tilde{w} \in \mathcal{L}_{\tilde{K}}$ mit $\tilde{w}(z_0) = w(z_0)$ und $\tilde{w}'(z_0) = w'(z_0)$. $\tilde{w}|_{K_0}, w|_{K_0} \in \mathcal{L}_{K_0}$. Eindeigkeitsatz für K_0 : $w|_{K_0} = \tilde{w}|_{K_0}$. Identitätssatz: $\tilde{w} = w$ auf $K \cap \tilde{K}$ \square

Iterativ ergibt sich:

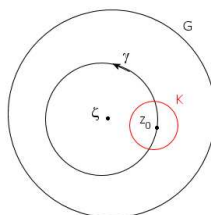
4.4.2 Korollar

Seien $K, \tilde{K} \subseteq G$ Kreisscheiben um z_0 bzw. z_1 , $\gamma \subseteq G$ ein Weg von z_0 nach z_1 . Dann gilt:

1. $w_0 \in \mathcal{L}_K$ lässt sich längs γ eindeutig fortsetzen zu einer Lösung w_1 auf $\mathcal{L}_{\tilde{K}}$
2. $\tau_\gamma : \mathcal{L}_K \rightarrow \mathcal{L}_{\tilde{K}}, w_0 \mapsto w_1 =$ Endergebnis der Fortsetzung von w_0 längs γ . Dies ist ein Isomorphismus von \mathbb{C} -Vektorräumen.

C. Die Monodromie- Abbildung

ζ sei eine isolierte Singularität von p, q . G punktierte Kreisscheibe um ζ auf der p und q analytisch sind. $z_0 \in G$, $\gamma \subseteq G$ Kreis um ζ , welcher durch z_0 geht. $K \subseteq G$ offene Kreisscheibe um z_0 .



Frage: Wie sehen die Lösungen von (615) in K aus?

Aufschluß darüber erhält man, indem man diese längs γ um die Singularität ζ "herumführt". Betrachte $\tau = \tau_\gamma : \mathcal{L}_K \rightarrow \mathcal{L}_K$. τ heißt MONODROMIE-ABBILDUNG von \mathcal{L}_K um ζ . τ ist Isomorphismus $\Rightarrow \tau$ hat nur Eigenwerte $\lambda \neq 0$ (λ Eigenwert von $\tau \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}_K$ mit $w \neq 0$ und $\tau(w) = \lambda w$). $\dim \mathcal{L}_K = 2 \Rightarrow \tau$ hat mindestens einen und höchstens 2 Eigenwerte.

Von welchem "Typ" sind die zugehörigen Eigenvektoren?

4.4.3 Lemma

(o.E. sei $\zeta = 0$) Sei $w \in \mathcal{L}_K$ ein Eigenvektor von τ zum Eigenwert $\lambda \neq 0$ ($\rightarrow \lambda = e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{C}$). Dann ist $w(z)$ von der Form

$$w(z) = z^\alpha \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad (619)$$

wobei $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ eine auf G konvergente Laurent-Reihe ist und $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ mit einem auf K definierten Zweig des Logarithmus.

Beweis: Im Beispiel (Nachtrag) haben wir gesehen: Bei Fortsetzung längs γ geht $\log z$ über in $\log z + 2\pi i \Rightarrow z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ geht über in $e^{\alpha(\log z + 2\pi i)} = \lambda z^\alpha$. Ferner gilt $\tau(w) = \lambda w$ nach Voraussetzung.

$$\frac{w}{z^\alpha} \rightsquigarrow \frac{\tau(w)}{\tau(z^\alpha)} = \frac{\lambda w}{\lambda z^\alpha} = \frac{w}{z^\alpha} \quad (620)$$

Nach 4.3.6.(2) ist daher

$$\frac{w}{z^\alpha} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \forall z \in G \quad \square \quad (621)$$

Sei $\{w_1, w_2\}$ ein FS von $\mathcal{L}_K \Rightarrow \{\tau(w_1), \tau(w_2)\}$ FS. $\tau(w_1) = aw_1 + cw_2$, $\tau(w_2) = bw_1 + dw_2$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{C}) \quad (622)$$

A heißt MONODROMIE-MATRIX. Lineare Algebra: $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $\tau \Leftrightarrow \det(A - \lambda E_2) = 0 = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$

4.4.4 Struktur des FS von (615) auf K

Seien λ_1, λ_2 die Nullstellen von $\det(A - \lambda E_2)$.

1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2$: Zugehörige Eigenvektoren $w_1, w_2 \in \mathcal{L}_K$ bilden ein FS. Nach 4.4.2 haben w_1 und w_2 die folgende Form

$$w_1(z) = (z - \zeta)^{\alpha_1} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - \zeta)^n, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda_1 \quad (623)$$

$$w_2(z) = (z - \zeta)^{\alpha_2} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - \zeta)^n, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda_2 \quad (624)$$

2. Fall: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, aber \mathcal{L}_K besitzt eine Basis w_1, w_2 , bestehend aus Eigenvektoren. Dann sind w_1 und w_2 wie im 1. Fall, nur dass hier $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$,

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda \quad (625)$$

3. Fall: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, aber τ ist nicht diagonalisierbar: Sei w_1 ein Eigenvektor von τ . Ergänze w_1 beliebig durch w_2 zu einer Basis von \mathcal{L}_K : $\tau(w_1) = \lambda w_1$, $\tau(w_2) = cw_1 + dw_2$ mit $c \neq 0$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad (626)$$

λ ist der einzige Eigenwert von $A \Rightarrow d = \lambda$, $\tau(w_2) = cw_1 + \lambda w_2$. $\frac{w_2}{w_1}$ geht nur durch Fortsetzung längs γ über in

$$\frac{\tau(w_2)}{\tau(w_1)} = \frac{cw_1 + \lambda w_2}{\lambda w_1} = \frac{w_2}{w_1} + \frac{c}{\lambda} \quad (627)$$

Setze

$$g(z) := \frac{w_2}{w_1} - \frac{c}{\lambda} \frac{1}{2\pi i} \log(z - \zeta) \quad (628)$$

Nach 4.3.6.2: $g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - \zeta)^n$ eine auf G konvergente Laurent-Reihe \Rightarrow Man hat ein FS der Gestalt

$$w_1(z) = (z - \zeta)^\alpha \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - \zeta)^n \quad (629)$$

$$w_2(z) = (z - \zeta)^\alpha \sum_{-\infty}^{\infty} b_n (z - \zeta)^n + w_1(z) \frac{c}{2\pi i \lambda} \log(z - \zeta) \quad (630)$$

$$\text{wobei: } \sum_{-\infty}^{\infty} b_n (z - \zeta)^n = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - \zeta)^n \right) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - \zeta)^n \right) \quad (631)$$

$$\text{denn: } w_2(z) = w_1(z) \left(g(z) + \frac{c}{2\pi i \lambda} \log(z - \zeta) \right) \quad (632)$$

4.5 Regulär- singuläre Punkte

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad (633)$$

Nach 4.2 bzw. 4.4 wissen wir einiges über die Struktur von Lösungen von (633) nahe einer isolierten Singularität

4.5.1 Satz (L. Fuchs)

Sei z_0 eine isolierte Singularität der DGL (633), d.h. p, q analytisch in einer punktierten Umgebung von z_0 . Sei $\{w_1, w_2\}$ ein FS von (633) in der Nähe von z_0 , wie in 4.4.3. Bei w_1 und w_2 treten nun (gemäß 4.4.3) gewisse Laurent- Reihen um z_0 auf. Es sind dann folgende Bedingungen äquivalent:

1. Die auftretenden Laurent- Reihen haben alle einen endlichen Hauptteil
2. $p(z)$ hat einen Pol der Ordnung ≤ 1 und $q(z)$ hat einen Pol der Ordnung ≤ 2 bei z_0 .

$$p(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \quad (634)$$

$$q(z) = \frac{b_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{z - z_0} + b_0 + \dots \quad (635)$$

Falls 2. gilt, heißt z_0 eine REGULÄR- SINGULÄRE STELLE von (633).

Beispiel: Legendre- Gleichung hat nur regulär- singuläre Singularitäten:

$$w'' - \frac{2z}{(1-z)(1+z)}w' + \left(\frac{\lambda}{(1-z)(1+z)} - \frac{m^2}{(1-z)^2(1+z)^2} \right) w = 0 \quad (636)$$

und zwar bei $z_0 = \pm 1$.

Beweis: 2. \Rightarrow 1.: Sei z_0 eine regulär- singuläre Stelle von (633). Werden sehen: Der Lösungsansatz für w_1, w_2 mit endlichen Hauptteilen führt zum Erfolg. Nahe z_0 ist nach Voraussetzung die DGL (633) äquivalent zu (multipliziere mit $(z - z_0)^2$)

$$(z - z_0)^2 w'' + (z - z_0) \tilde{p}(z) w' + \tilde{q}(z) w = 0; \quad \tilde{p}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n (z - z_0)^n; \quad \tilde{q}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n (z - z_0)^n, \quad (637)$$

wobei \tilde{p}, \tilde{q} Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius. Setze eine Lösung an in der Form

$$w(z) = (z - z_0)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n; \quad a_0 \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (638)$$

Wenn der Satz stimmt, muss es eine solche Lösung geben. Sei o.E. $z_0 = 0$.

Ziel der folgenden Rechnung: α und $(a)_{n \in \mathbb{N}}$ so bestimmen, dass obiges $w(z)$ eine Lösung von (637) ist.

$$\tilde{q}(z)w(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n q_\nu a_{n-\nu} \right) z^n \quad (639)$$

$$z \tilde{p}(z)w'(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^n (n - \nu + \alpha) p_\nu a_{n-\nu} \right) z^n \quad (640)$$

$$z^2 w''(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha)(n + \alpha - 1) a_n z^n \quad (641)$$

$$\text{Nach (637): } 0 = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (642)$$

$$\begin{aligned} \text{wobei: } c_n &= a_n [(n + \alpha)(n + \alpha - 1) + (n + \alpha)p_0 + q_0] \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^n a_{n-\nu} [(\alpha + n - \nu)p_\nu + q - \nu] \end{aligned} \quad (643)$$

Es folgt: $c_n = 0$ für $n = 0, 1, \dots$. Man erhält somit die folgenden Gleichungen:

$$n = 0 : \quad a_0(\alpha(\alpha - 1) + \alpha p_0 + q_0) = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad (644)$$

$$\Rightarrow \text{Indexgleichung: } I : \quad \alpha(\alpha - 1) + \alpha p_0 + q_0 = 0 \quad (645)$$

$$n > 0 : \quad R_n : \quad a_n[(n + \alpha)(n + \alpha - 1) + (n + \alpha)p_0 + q_0] \\ + \sum_{\nu=1}^n a_{n-\nu}[(\alpha + n - \nu)p_\nu + q_\nu] = 0 \quad (646)$$

Für $n > 0$ erhält man obige Rekursionsgleichungen. Für $z \in \mathbb{C}$ definiere:

$$\chi(z) = z(z - 1) + zp_0 + q_0 \quad (647)$$

Damit vereinfachen sich die Gleichungen I und R_n zu:

$$I : \quad \chi(\alpha) = 0 \quad (648)$$

$$R_n : \quad a_n \chi(n + \alpha) = - \sum_{\nu=1}^n a_{n-\nu}[(\alpha + n - \nu)p_\nu + q_\nu] \quad (649)$$

Fazit: Sind die Gleichungen I und R_n mit $n \geq 0$ für ein α und eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen erfüllt, so ist

$$w(z) = (z - z_0)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (650)$$

Lösung von (637). Seien $\alpha_{1/2}$ die Nullstellen von $\chi(z)$ in \mathbb{C} . Unterscheide 3 Fälle:

1. Fall: $\alpha_1 \neq \alpha_2$ und $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \chi(\alpha_j + n) \neq 0$ für alle $n \geq 1, j = 1, 2$. Daher sind bei vorgegebenem $a_0 \neq 0$ (etwa $a_0 = 1$) die a_n rekursiv so bestimmbar, dass R_n gilt:

$$a_n := \frac{- \sum_{\nu=1}^n a_{n-\nu}[(\alpha + n - \nu)p_\nu - q_\nu]}{\chi(\alpha + n)}, \quad \alpha = \alpha_j, \quad j = 1, 2 \quad (651)$$

Auf diese Weise erhält man rekursiv ein FS von (637) von der Gestalt

4.5.2

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (652)$$

$$w_2(z) = (z - z_0)^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad (653)$$

2. Fall: $\alpha_1 \neq \alpha_2$, aber $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}$, o.E. $\alpha_1 > \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2 = n_0 \geq 1, n_0 \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \chi(\alpha_1 + n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \quad (654)$$

Wie im 1. Fall: Aus R_n erhält man rekursiv zu α_1 eine Lösung der Gestalt

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (655)$$

Dies funktioniert nicht für α_2 :

$$\chi(\alpha_2 + n_0) = \chi(\alpha_1) = 0, \quad (656)$$

also ist a_n nicht mehr mit Hilfe der Rekursionsgleichung

$$R_{n_0} : \quad a_{n_0} \underbrace{\chi(\alpha_2 + n_0)}_{=0} = - \sum_{\nu=1}^{n_0} a_{n_0-\nu}[(\alpha + n - \nu)p_\nu - q_\nu] \quad (657)$$

aus den vorherigen Koeffizienten zu bestimmen. **Reduktionsansatz:** $w_2 = w_1 u$ für eine weitere Lösung w_2 von (637). Sei o.E. $z_0 = 0$.

$$w_2 = w_1 u \Rightarrow u' = \frac{w_2' w_1 - w_2 w_1'}{w_1^2} = \frac{\delta}{w_1^2} \quad (658)$$

δ erfüllt dann die DGL

$$\delta' = -\frac{\tilde{p}(z)}{z} \delta, \quad (659)$$

falls auch w_2 eine Lösung von (637) ist:

$$\delta' = w_2'' w_1 - w_1'' w_2 = -\left(\frac{\tilde{p}(z)}{z} w_2' + \frac{\tilde{q}(z)}{z^2} w_2\right) w_1 + \left(\frac{\tilde{p}(z)}{z} w_1' + \frac{\tilde{q}(z)}{z^2} w_1\right) w_2 = -\frac{\tilde{p}(z)}{z} \delta \quad (660)$$

Umgekehrt: Ist δ gegeben mit einer Beziehung der Form von (659) und u gegeben mit

$$u' = \frac{\delta}{w_1^2}, \quad (661)$$

so folgt $w_2 = w_1 u$ Lösung von (637).

$$\frac{\tilde{p}(z)}{z} = \frac{p_0}{z} + p_1 + p_2 z + \dots \text{ hat die Stammfunktion} \quad (662)$$

$$r(z) = p_0 \log z + p_1 z + \frac{p_2}{2} z^2 + \dots \quad (663)$$

$$\Rightarrow \delta(z) = e^{-r(z)} \quad (664)$$

erfüllt die DGL (659).

$$\delta = z^{-p_0} e^{-p_1 z - \frac{p_2}{2} z^2 - \dots} \quad (665)$$

$$u' := \frac{1}{w_1^2} \delta = \frac{1}{z^{2\alpha - p_0}} \frac{e^{-p_1 z - \frac{p_2}{2} z^2 - \dots}}{[a_0 + a_1 z + \dots]^2} \quad (666)$$

$$= z^{-\nu} [c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots], \quad \nu = 2\alpha_1 + p_0, \quad c_0 = \frac{1}{a_0} \neq 0 \quad (667)$$

α_1 und α_2 sind die Nullstellen von $\chi(z)$

$$\begin{aligned} \chi(z) &= z(z-1) + zp_0 + q_0 = z^2 - (1-p_0)z + q_0 = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2) \\ &= z^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)z + \alpha_1\alpha_2 \end{aligned} \quad (668)$$

$$\Rightarrow 1 - p_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_1 - n_0 \quad (669)$$

$$\Rightarrow \nu = 2\alpha_1 + p_0 = 1 + n_0 \geq 2, \quad \nu \in \mathbb{Z} \quad (670)$$

$$\Rightarrow u' = c_0 \frac{1}{z^\nu} + \dots + c_{\nu-1} \frac{1}{z} + c_\nu + c_{\nu+1} z + \dots, \quad \nu \geq 2 \quad (671)$$

Formale Integration:

$$u = c_{\nu-1} \log z + z^{-\nu+1} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n z^n, \text{ wobei } \tilde{b}_n \neq 0, \text{ da } c_n \neq 0 \quad (672)$$

$$w_2 := w_1 u \text{ ist die gesuchte Lösung}$$

$$\alpha_2 = n_0 + \alpha_1 = (-\nu + 1) + \alpha_1 \quad (673)$$

$$\Rightarrow w_2 = c_{\nu-1} w_1 \log z + z^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \text{ wobei } b_0 = a_0 \tilde{b}_0 \neq 0 \quad (674)$$

Fazit: Man hat in diesem Fall ein FS der Gestalt

4.5.3

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_0 \neq 0 \quad (675)$$

$$w_2(z) = c_{\nu-1} w_1 \log(z - z_0) + (z - z_0)^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad b_0 \neq 0 \quad (676)$$

3. Fall: $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha$: Ausgehend von einer Lösung w_1 wie im Fall 2 ($\chi(\alpha_1 + n) \neq 0$ für $n \geq 1$) verfährt man wie in Fall 2 (Reduktionsansatz). Hier gilt wegen $\alpha_1 = \alpha_2$: $n_0 = 1$, also $\nu = 1$, also $c_{\nu-1} = c_0 \neq 0$.

Fazit: Im Fall $\alpha_1 = \alpha_2$ kommt ein logarithmischer Term vor.

4.5.4

Man hat ein FS

$$w_1(z) = (z - z_0)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } a_0 \neq 0 \quad (677)$$

$$w_2(z) = w_1 \log(z - z_0) + (z - z_0)^\alpha \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n}_{\text{kann } =0 \text{ sein}} \quad (678)$$

Bezeichnung: α_1 und α_2 heißen die CHARAKTERISTISCHEN EXPONENTEN der DGL (633) im Punkt z_0 . Vergleich der Aussagen aus 4.2 und 4.5 ergibt:

4.5.5

Hat (633) im regulär- singulären Punkt z_0 die charakteristischen Exponenten α_1, α_2 , so sind

$$\lambda_{1/2} = e^{2\pi i \alpha_{1/2}} \quad (679)$$

die Eigenwerte der Monodromie (Im 2. und 3. Fall ist $\lambda_1 = \lambda_2$).

Der Punkt " ∞ ": Will man Funktionen $w(z)$ für große z untersuchen (" ∞ ") so macht man die Substitution $z = \frac{1}{t}$ und betrachtet die Funktion $\tilde{w}(t) = w(\frac{1}{t})$ bei $t = 0$. Ergänze \mathbb{C} noch durch ein Symbol ∞ und setze:

$$\frac{a}{\infty} = 0 \text{ für } a \neq 0, \infty \quad (680)$$

$$\frac{a}{0} = \infty \text{ für } a \neq 0, \infty. \quad (681)$$

Dann bildet $z \mapsto \frac{1}{t}$ die Menge $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bijektiv auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ab. Man sagt daher: $w(z)$ hat im Punkt ∞ eine gewisse Eigenschaft, wenn $\tilde{w}(t)$ die entsprechende Eigenschaft im Nullpunkt hat.

Speziell: ∞ ist Nullstelle von $w \Leftrightarrow 0$ Nullstelle von \tilde{w} .

Beispiel: ∞ ist Nullstelle von $\frac{1}{z}$.

Allgemeiner: ∞ n- fache Nullstelle bzw. Pol von $w \Leftrightarrow 0$ n- facher Pol bzw. Nullstelle von \tilde{w} .

Beispiel: $\frac{1}{1-z^2}$ hat in ∞ eine 2-fache Nullstelle: $\frac{1}{1-\frac{1}{t^2}} = \frac{t^2}{t^2-1}$ hat 0 als 2-fache Nullstelle.

Wie transformiert sich (633) beim Übergang $z \mapsto \frac{1}{z}$?

$$\tilde{w}(t) = w\left(\frac{1}{t}\right), \tilde{w}'(t) = w'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right) \quad (682)$$

$$\Rightarrow w'\left(\frac{1}{t}\right) = -t^2 \tilde{w}'(t), w''\left(\frac{1}{t}\right) = t^2 (2t \tilde{w}'(t) + t^2 \tilde{w}''(t)) \quad (683)$$

$$\Rightarrow w''\left(\frac{1}{t}\right) = 2t^3 \tilde{w}'(t) + t^4 \tilde{w}''(t) \quad (684)$$

Damit schreibt sich (633) um in die Gleichung

$$\tilde{w}'' + \left(\frac{2}{t} - p\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2}\right) \tilde{w}' + q\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^4} \tilde{w} = 0 \quad (685)$$

Man sagt daher: ∞ ist eine regulär- singuläre Stelle von (633), wenn 0 eine regulär- singuläre Stelle von (685) ist.

4.5.6 Bemerkung

1. ∞ ist ein regulär- singulärer Punkt von (633) \Leftrightarrow

- $p\left(\frac{1}{t}\right)$ hat bei 0 mindestens eine einfache Nullstelle und
- $q\left(\frac{1}{t}\right)$ hat bei 0 mindestens eine doppelte Nullstelle

Anders ausgedrückt: ∞ ist regulär- singulär für (633) $\Leftrightarrow p(z)$ hat bei ∞ mindestens eine einfache Nullstelle und $q(z)$ mindestens eine doppelte.

2. Mit $P(t) = \frac{1}{t}p\left(\frac{1}{t}\right)$, $Q(t) = \frac{1}{t^2}q\left(\frac{1}{t}\right)$ schreibt sich (685) in der Form:

$$t^2\tilde{w}'' + t(2 - P(t))\tilde{w}' + Q(t)\tilde{w} = 0 \quad (686)$$

Daraus ergibt sich die Indexgleichung im Punkt ∞ :

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha(2 - P(0)) + Q(0) = 0 \quad (687)$$

Beispiel: ∞ ist regulär- singulärer Punkt der Legendre- DGL:

$$p(z) = \frac{2z}{1 - z^2} \Rightarrow p\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2t}{t^2 - 1}, \quad 0 \text{ einfache Nullstelle, } P(0) = -2 \quad (688)$$

$$q(z) = \frac{\lambda}{1 - z^2} - \frac{m^2}{(1 - z^2)^2} \Rightarrow q\left(\frac{1}{t}\right) = t^2 \left(\frac{\lambda}{t^2 - 1} - \frac{m^2}{(t^2 - 1)^2} \right), \quad Q(0) = -\lambda$$

Indexgleichung für die Legendre- DGL im Punkt ∞ :

$$\alpha(\alpha - 1) + 4\alpha - \lambda = 0 \quad (689)$$

Die Eigenwerte der Legendre DGL

Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Aus der Herkunft der Legendre- DGL ergibt sich das folgende EW- Problem: Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt es eine nichttriviale Lösung $w(z)$ der Legendre- DGL

$$(1 - z^2)w'' - 2zw' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - z^2} \right) w = 0 \quad (690)$$

auf dem reellen Intervall $I =] - 1, 1[$, für welche die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \pm 1, x \in I} w(x)$ existieren?

Diese λ heißen EIGENWERTE der Legendre- DGL.



Übergang zum Komplexen: Sei $E : |z| < 1$. ± 1 regulär- singulär für (633). (690) hat auf E Lösungsbasen, welche in punktierten Umgebungen A bzw. \tilde{A} von ± 1 eine Gestalt gemäß 4.3.2 und 4.5.2 haben.

Berechnung der Indexgleichung bei $z_0 = +1$:

$$(z - 1)^2 w'' + (z - 1) \underbrace{\frac{2z}{z + 1}}_{=\tilde{p}(z)} w' + \underbrace{\left(- \left(\lambda \frac{z - 1}{z + 1} + \frac{m^2}{(z + 1)^2} \right) \right)}_{=\tilde{q}(z)} w = 0 \quad (691)$$

$$p_0 = \tilde{p}(1) = 1 \quad (692)$$

$$q_0 = \tilde{q}(1) = -\frac{m^2}{4} \quad (693)$$

$$\Rightarrow I : \alpha(\alpha - 1) + \alpha - \frac{m^2}{4} = 0 \quad (694)$$

$\Rightarrow \alpha_{1/2} = \pm \frac{m}{2}$ sind die Exponenten bei $z_0 = 1$.

Analog: Indexgleichung bei $z_0 = -1$ ist

$$I : \alpha(\alpha - 1) + \alpha + \frac{m^2}{4} = 0 \quad (695)$$

$\Rightarrow \alpha_{1/2} = \pm \frac{m}{2}$ sind die Exponenten bei $z_0 = -1$.

Gesehen: In beiden singulären Punkten: Die Exponenten sind $\alpha_{1/2} \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = m \in \mathbb{N}_0$. Es liegt also der Fall 2 oder 3 vor. Nach 4.5.1 und 4.5.2 hat man nahe ± 1 folgende FS'e:

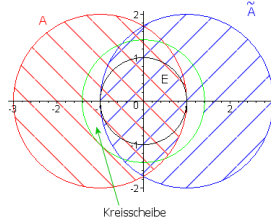
$$\text{Nahe } -1: w_1(z) = (z+1)^{\frac{m}{2}}(1+h_1(z)) \quad (696)$$

$$w_2(z) = (z+1)^{-\frac{m}{2}}(1+h_2(z)) + cw_1(z)\log(z+1) \quad (697)$$

$$\text{Nahe } +1: \tilde{w}_1(z) = (1-z)^{\frac{m}{2}}(1+\tilde{h}_1(z)) \quad (698)$$

$$\tilde{w}_2(z) = (1-z)^{-\frac{m}{2}}(1+\tilde{h}_2(z)) + \tilde{c}\tilde{w}_1(z)\log(1-z) \quad (699)$$

Dabei $c, \tilde{c} \neq 0$, falls $m = 0$ (siehe 4.5.1)



In der punktierten Kreisscheibe A :

$$w_1(z) = (z+1)^{\frac{m}{2}}(1+h_1(z)) \quad (700)$$

$$w_2(z) = (z+1)^{-\frac{m}{2}}(1+h_2(z)) + cw_1(z)\log(z+1) \quad (701)$$

in der punktierten Kreisscheibe \tilde{A} :

$$\tilde{w}_1(z) = (1-z)^{\frac{m}{2}}(1+\tilde{h}_1(z)) \quad (702)$$

$$\tilde{w}_2(z) = (1-z)^{-\frac{m}{2}}(1+\tilde{h}_2(z)) + \tilde{c}\tilde{w}_1(z)\log(1-z) \quad (703)$$

Ferner: h_1, h_2 sind analytisch in der vollen Umgebung von -1 mit $h_1(-1) = h_2(-1) = 0$. \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 sind analytisch in der vollen Umgebung von $+1$ mit $\tilde{h}_1(1) = \tilde{h}_2(1) = 0$.

Sei nun λ ein Eigenwert der Legendre- DGL, d.h.: Es existiert eine Lösung $w(z) \neq 0$ von (685) auf E , für die die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \pm 1, x \in I} w(x)$ existieren. $w(z)$ heißt dann EIGENFUNKTION zum Eigenwert λ . Der EIGENRAUM zum Eigenwert λ ist die Menge aller Eigenfunktionen zu λ . Es gilt:

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 = \tilde{c}_1 \tilde{w}_1 + \tilde{c}_2 \tilde{w}_2, \quad c_i, \tilde{c}_i \in \mathbb{C} \quad (704)$$

und $\lim_{x \rightarrow \pm 1} w(x)$ existiert. Wie man sieht:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} w_1(x) \text{ existiert} \\ \lim_{x \rightarrow -1} \tilde{w}_1(x) \text{ existiert} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} |w_2(x)| = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -1} |\tilde{w}_2(x)| = \infty \end{array} \Rightarrow c_2 = \tilde{c}_2 = 0, \quad c_1, \tilde{c}_1 \neq 0 \quad (705)$$

Es folgt:

4.5.7 Satz (Struktur der Eigenfunktionen)

Sei λ Eigenwert und $w(z)$ zugehörige Eigenfunktion der Legendre- DGL. Dann gilt:

1. Der Eigenraum zum Eigenwert λ ist 1-dimensional. Ferner gilt:
2. Es gibt eine ganze analytische Funktion f , so dass

$$w(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} f(z) \text{ und } f(\pm 1) \neq 0 \quad (706)$$

Beweis von 2.:

$$\text{Auf } A: w(z) = c_1 w_1(z) = c_1 (1+z)^{\frac{m}{2}} (1+h_1(z)) \quad (707)$$

$$\text{Auf } \tilde{A}: w(z) = \tilde{c}_1 \tilde{w}_1(z) = \tilde{c}_1 (1-z)^{-\frac{m}{2}} (1+\tilde{h}_1(z)) \quad (708)$$

$$(1-z^2)^{-\frac{m}{2}} = \frac{1}{(1-z)^{\frac{m}{2}} (1+z)^{\frac{m}{2}}} \quad (709)$$

Wähle auf $A \cap \tilde{A}$ eine Zweig von $(1-z^2)^{-\frac{m}{2}}$. Setze

$$f(z) := (1-z^2)^{-\frac{m}{2}} w(z) \text{ für } z \in A \cap \tilde{A} \text{ analytisch} \Rightarrow \quad (710)$$

- $f(z) = c_1(1-z)^{-\frac{m}{2}}(1+h_1(z))$. Rechte Seite analytisch sogar auf $A \cup \{-1\}$
- $f(z) = \tilde{c}_1(1+z)^{-\frac{m}{2}}(1+\tilde{h}_1(z))$. Rechte Seite analytisch sogar auf $\tilde{A} \cup \{+1\}$.

$\Rightarrow f(z)$ analytisch fortsetzbar auf $A \cup \tilde{A}$. Nach 4.2.4: f analytisch fortsetzbar längs jeden Weges, der nicht durch ± 1 geht. **Es folgt:** f lässt sich zu einer ganzen analytischen Funktion fortsetzen \square

4.6 Die Legendre- DGL

A. Die Legendre- Polynome

Betrachte die Legendre- DGL für $m = 0$:

$$Lw := (1 - z^2) w'' - 2zw' + \lambda w = 0 \quad (711)$$

1. Berechnung eines FS auf $|z| < 1$ gemäß 4.5.7:

Potenzreihenansatz: $w = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$. Einsetzen in (711):

$$(1 - z^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)u_n z^{n-2} - 2z \sum_{n=1}^{\infty} n u_n z^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = 0 \quad (712)$$

Koeffizientenweise ergibt sich:

$$(n+2)(n+1)u_{n+2} - \underbrace{n(n-1)u_n - 2nu_n}_{=n(n-1)u_n} + \lambda u_n = 0 \quad (713)$$

\Rightarrow Rekursionsformel: Seien Anfangswerte $u_0 = w(0)$ und $u_1 = w'(0)$ vorgegeben. Dann gilt:

$$u_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} u_n, \quad n \geq 0 \quad (714)$$

Also sind die u_n durch Vorgabe von u_0 und u_1 eindeutig so bestimmbar, dass $w = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ eine Lösung von (711) ist. Aus u_0 berechnen sich nacheinander u_0, u_2, u_4, \dots . Aus u_1 berechnen sich u_3, u_5, u_7, \dots .

Damit erhält man ein FS, wenn man $u_0 = 0, u_1 = 1$ bzw. $u_0 = 1, u_1 = 0$ setzt.

2. Nach 4.5.7: ($m = 0$): $w(z)$ Eigenfunktion $\Leftrightarrow w(z)$ ist ganz, d.h.: $w(z)$ hat Konvergenzradius ∞ .

Betrachte die Konvergenzradien der Reihen:

$$w_g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k} z^{2k}, \quad w_u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k+1} z^{2k+1} \quad (715)$$

Sie sind dann Lösungen zu den Anfangswerten $(u_0, 0)$ bzw. $(0, u_1)$. $w_g(z)$ berechnet sich gemäß

$$\frac{u_{2k+2}}{u_{2k}} = \frac{2k(2k+1) - \lambda}{(2k+1)(2k+2)} \quad (716)$$

aus u_0 . Zwei Möglichkeiten:

1. $u_0 \neq 0$ und $\lambda \neq 2k(2k+1)$ für alle $k \in \mathbb{N} \Rightarrow w_g(z)$ hat Konvergenzradius 1
2. $u_0 = 0$ oder $\lambda = 2k(2k+1)$ für ein $k \in \mathbb{N} \Rightarrow w_g(z)$ Polynom, Konvergenzradius ∞ .

$w_u(z)$ berechnet sich gemäß Formel

$$\frac{u_{2k+3}}{u_{2k+1}} = \frac{(2k+1)(2k+2) - \lambda}{(2k+2)(2k+3)} \quad (717)$$

aus u_1 .

Analogue: Konvergenzradius von $w_u(z)$ ist nur dann ∞ , falls entweder $u_1 = 0$ oder $u_1 \neq 0$ und $\lambda = l(l+1)$ mit $l \geq 1$ ungerade. In diesem Fall ist $w_u(z)$ ein Polynom.

$w(z)$ Eigenfunktion (Konvergenzradius ∞) $\Leftrightarrow w_g$ und w_u haben Konvergenzradius ∞ .

Fazit:

4.6.1 Satz

Die Eigenwerte der Legendre- DGL mit $m = 0$ sind von der Form $\lambda = l(l+1)$ mit ganzen Zahlen $l \geq 0$. Die Eigenfunktionen sind Polynome $P(z)$, wobei:

$$P(z) = u_0 + u_2 z^2 + u_4 z^4 + \dots + u_{2k} z^{2k}, \quad \text{falls } l = 2k \text{ gerade, } u_{2k} \neq 0 \quad (718)$$

$$P(z) = u_1 z + u_3 z^3 + u_5 z^5 + \dots + u_{2k+1} z^{2k+1}, \quad \text{falls } l = 2k+1, u_{2k+1} \neq 0 \quad (719)$$

Dabei genügen die u_j der Formel (714).

Definition: Sei $l \geq 0$ ganz. Das l -te Legendre- Polynom $P_l(z)$ ist dasjenige Polynom l -ten Grades, welches die Gleichungen

$$(1 - z^2) P_l'' - 2zP_l' + l(l+1)P_l = 0 \text{ und} \quad (720)$$

$$P_l(1) = 1 \quad (721)$$

erfüllt.

Beispiel:

$$P_0(z) = 1, P_1(z) = z, P_2(z) = \frac{1}{2} (3z^2 - 1), \dots \quad (722)$$

Andere Beschreibung der Legendre- Polynome:

4.6.2 Formel von Rodriguez

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \left[(z^2 - 1)^l \right]^{(l)} \quad (723)$$

Beweis:

$$Q_l(z) = \left[(z^2 - 1)^l \right]^{(l)} = \left[(z+1)^l (z-1)^l \right]^{(l)} \quad (724)$$

Leibniz- Regel wird verwendet:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} f^{(\nu)} g^{(n-\nu)} \quad (725)$$

$$Q_l(z) = \sum_{\nu=0}^l \binom{l}{\nu} \left[(z-1)^l \right]^{(\nu)} \left[(z+1)^l \right]^{(l-\nu)} \quad (726)$$

$$\Rightarrow Q_l(1) = \binom{l}{0} l!(1+l)^l = l!2^l \quad (727)$$

$$\Rightarrow P_l(1) = 1 \quad (728)$$

$$(z^2 - 1) \left[(z^2 - 1)^l \right]' = 2lz (z^2 - 1)^l \quad (729)$$

Leite diese Identität $(l+1)$ - mal ab nach Leibniz:

$$\begin{aligned} & (z^2 - 1) \underbrace{\left[(z^2 - 1)^l \right]^{(l+2)}}_{=Q_l''} + (l+1)2z \underbrace{\left[(z^2 - 1)^l \right]^{(l+1)}}_{=Q_l'} + \binom{l+1}{2} 2 \underbrace{\left[(z^2 - 1)^l \right]^{(l)}}_{=Q_l} = \\ & = 2lz \underbrace{\left[(z^2 - 1)^l \right]^{(l+1)}}_{=Q_l'} + (l+1)2l \underbrace{\left[(z^2 - 1)^l \right]^{(l)}}_{=Q_l} \end{aligned} \quad (730)$$

$$\Rightarrow (1 - z^2) Q_l'' - 2zQ_l' + l(l+1)Q_l = 0 \quad (731)$$

$\Rightarrow P_l$ löst die Legendre- DGL für $\lambda = l(l+1)$ \square

4.6.3 Orthogonalität

$$\langle P_k, P_n \rangle = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } n \neq k \\ \frac{2}{2n+1} & n = k \end{cases} \quad (732)$$

Beweis:

$$0 \leq n \leq k \quad (733)$$

$$\left. \left((x^2 - 1)^k \right)^{(k-1)} \right|_{x=\pm 1} = 0 \quad (734)$$

$$\int_{-1}^{+1} \left[(x^2 - 1)^k \right]^{(k)} \left[(x^2 - 1)^n \right]^{(n)} dx = - \int_{-1}^{+1} -1^{+1} \left[(x^2 - 1)^k \right]^{(k-1)} \left[(x^2 - 1)^n \right]^{(n+1)} dx$$

Rekursiv ergibt sich für $0 \leq r \leq k$

$$\int_{-1}^{+1} [(x^2 - 1)^k]^{(k)} [(x^2 - 1)^n]^{(n)} dx = (-1)^r \int_{-1}^{+1} [(x^2 - 1)^k]^{(k-r)} [(x^2 - 1)^n]^{(n+r)} dx \quad (735)$$

- $n < k$: Wende (735) für $r = n + 1 \leq k$ an: $n + r = 2n + 1 > 2n$

$$\Rightarrow [(x^2 - 1)^n]^{(n+r)} = 0 \Rightarrow \langle Q_k, Q_n \rangle = 0 \quad (736)$$

- $n = k$: Wende (735) an mit $r = k$:

$$\begin{aligned} \langle Q_k, Q_n \rangle &= (-1)^k \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^k [(x^2 - 1)^k]^{(2k)} dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x)^k (1+x)^k (2k)! dx \\ &= k! \int_{-1}^1 (1-x)^k [(1+x)^{2k}]^{(k)} dx \\ &= k! (-1)^k \int_{-1}^1 -1^1 [(1-x)^k]^{(k)} (1+x)^{2k} dx \\ &= (k!)^2 \frac{2^{2k+1}}{2k+1} = \frac{2}{2k+1} (k!2^k)^2 \end{aligned} \quad (737)$$

$$\Rightarrow \langle P_k, P_k \rangle = \frac{2}{2k+1} \square \quad (738)$$

4.6.4 Bemerkung

Jedes Polynom ϕ vom Grad $\leq d$ schreibt sich eindeutig als Linearkombination

$$\phi = \sum_{n=0}^d a_n P_n \quad (739)$$

Wegen 4.6.3:

$$\langle \phi, P_k \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^d a_n P_n, P_k \right\rangle = a_k \langle P_k, P_k \rangle = a_k \frac{2}{2k+1} \quad (740)$$

Normiere die Legendre- Polynome zu \tilde{P}_l , so dass

$$\langle \tilde{P}_l, \tilde{P}_l \rangle = 1 \quad (741)$$

Dann folgt:

$$\phi = \sum_{l=0}^d \langle \phi, \tilde{P}_l \rangle \tilde{P}_l \quad (742)$$

Weierstraßscher Approximationssatz: Jede stetige Funktion $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich gleichmäßig durch Polynome approximieren. Wende (742) an auf die Näherungspolynome von f und erhalte:

4.6.5 Vollständigkeitsatz

Jede auf $] - 1, 1[$ stetige Funktion f hat eine Darstellung

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \tilde{P}_n \rangle \tilde{P}_n \quad (743)$$

4.6.6 Oszillationssatz

$P_l(x)$ hat im offenen Intervall $I =]-1, 1[$ genau l Nullstellen.

Beweis: $\deg P_l = l \Rightarrow P_l$ hat höchstens l reelle Nullstellen. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in I$ die Nullstellen von P_l in I von ungerader Ordnung $\Rightarrow l \geq m$. Genügt zu zeigen: $m = l$.

Angenommen: $m < l$. Betrachte das Polynom

$$Q(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m) \quad (744)$$

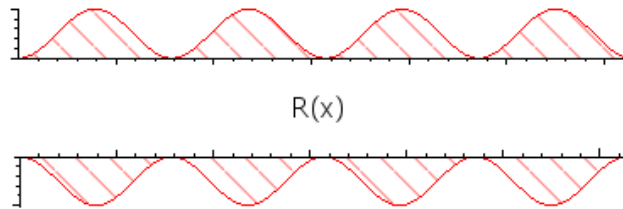
Nach 4.6.4 wegen $\deg Q < l$:

$$Q = \sum_{n=0}^{l+1} a_n P_n \Rightarrow \langle P_l, Q \rangle = 0 \quad (745)$$

Andererseits: $R(x) = P_l(x)Q(x)$ hat innerhalb I nur Nullstellen gerader Ordnung, d.h.

$$R(x) = (x - \lambda_1)^{2\nu_1} \dots (x - \lambda_s)^{2\nu_s} P(x), \quad s \geq m \quad (746)$$

und $P(x)$ hat in I keine Nullstellen. Nach dem Zwischenwertsatz folgt: Entweder $P(x) > 0$ für alle $x \in I \Rightarrow R(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ oder $P(x) < 0$ für alle $x \in I \Rightarrow R(x) \leq 0$ für alle $x \in I$.



In jedem Fall ist $R(x) \neq 0$ und wechselt innerhalb des Intervalls I nicht das Vorzeichen.

$$\Rightarrow 0 = \langle P_l, Q \rangle = \int_{-1}^1 R(x) dx \neq 0 \quad (747)$$

Also ist $m = l \quad \square$

B: Die zugeordneten Legendre- Funktionen

Allgemeine Legendre- DGL:

$$(1 - z^2) w'' - 2zw' + \left(\lambda + \frac{m^2}{1 - z^2} \right) w = 0, \quad m > 0, \quad m \text{ ganz} \quad (748)$$

Nach 4.5: Die Eigenfunktionen sind von der Form

$$w(z) = (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} f(z), \quad f(z) \text{ ganz} \quad (749)$$

Differenziere w und setze die resultierenden Ausdrücke für w' und w'' in (748) ein:

$$w' = (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} f' - mz(1 - z^2)^{\frac{m}{2}-1} f \quad (750)$$

$$w'' = (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} f'' - 2mz(1 - z^2)^{\frac{m}{2}-1} f' + 2m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) z^2 (1 - z^2)^{\frac{m}{2}-2} f - m(1 - z^2)^{\frac{m}{2}-1} f \quad (751)$$

Setze ein und dividiere durch $(1 - z^2)^{\frac{m}{2}}$. Erhalte:

$$(1 - z^2) f'' - 2(m+1)zf' - (\lambda - m(m+1)) f = 0 \quad (752)$$

Dabei ist (falls λ Eigenwert, w Eigenfunktion) f eine auf ganz \mathbb{C} analytische Funktion:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \quad (753)$$

Koeffizientenvergleich in (752) ergibt:

$$u_{n+2} = \frac{(m+n)(m+n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} u_n, \quad n \geq 0 \quad (754)$$

Wie in A schließt man:

- Ist f kein Polynom, so ist Konvergenzradius endlich, und λ ist kein Eigenwert ζ
- Ist f ein Polynom, so ist $\lambda = l(l+1)$ mit $l = m+n \geq m$, l ganz.

Genauer werden wir sehen:

4.6.7 Lemma

Seien l, m ganz mit $l \geq m \geq 0$ und $\lambda = l(l+1)$. Dann ist λ Eigenwert und die Funktion

$$P_l^m(z) := (1-z^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(z) \quad (755)$$

ist eine Eigenfunktion der Legendre- DGL (748) zum Eigenwert λ .

Beweis:

$$L_m f := (1-z^2) f'' - 2(m+1)z f' + (\lambda - m(m+1)) f \quad (756)$$

Wegen (752) ist zu zeigen, dass $L_m P_l^{(m)} = 0$. Induktion nach m :

$m = 0$: $L_0 f$ ist die Legendre- DGL für $m = 0$. Also $L_0 P_l^{(0)} = L_0 P_l = 0$. Leite nun die DGL $L_m f = 0$ ab:

$$\begin{aligned} (L_m f)' &= -2z(f')' + (1-z^2)(f'')' - 2(m+1)f' - 2(m+1)z(f')' + (\lambda - m(m+1))f' \\ &= \dots = L_{m+1}(f') \end{aligned} \quad (757)$$

$$(758)$$

Rekursiv: $L_0 P_l = 0 \Rightarrow L_1 P_l' = (L_0 P_l)' = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow L_m P_l^{(m)} = (L_{m-1} P_l^{(m-1)})' = 0 \quad \square$

Definition: Für ganze Zahlen m und l mit $0 < m \leq l$ heißen die Funktionen

$$P_l^m(z) := (1-z^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(z) \quad (759)$$

die ZUGEORDNETEN LEGENDRE- FUNKTIONEN. Wir fassen zusammen: Sei $m \geq 0$ ganz. Dann gilt:

4.6.8 Satz

1. $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Eigenwert der zu m gehörigen Legendre- DGL (748), wenn es eine ganze Zahl $l \geq m$ gibt, so dass

$$\lambda = l(l+1) \quad (760)$$

2. Ist $\lambda = l(l+1)$ ein Eigenwert von (748), so ist die zugeordnete Legendre- Funktion:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m)}(x) \quad (761)$$

die (bis auf einen konstanten Faktor eindeutige) Eigenfunktion zum Eigenwert λ .

4.7 Die Besselsche DGL

Aus der Wellengleichung (2- oder 3- dimensional) entstand durch Separation in Polar- bzw. Kugelkoordinaten eine sog. radiale Gleichung der Gestalt

$$w'' + \frac{1}{z}w' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)w = 0, \nu \in \mathbb{C} \quad (762)$$

- Ebener Fall: $\nu = n \geq 0$ ganz (\rightarrow Ganzzahlige Besselgleichung)
- Räumlicher Fall: $\nu = n + \frac{1}{2}$, $n \geq 0$ ganz (\rightarrow Halbzahlige Besselfunktion)

Betrachte zunächst die Gleichung (762) für beliebige $\nu \in \mathbb{C}$ (Allgemeine Besselgleichung). Fasse nun (762) auf als komplexe DGL auf dem Gebiet $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ziel: Ein explizites FS für (762) auf dem Intervall $[0, \infty[$ finden in den physikalisch relevanten Fällen 1 und 2.

Zweckmäßig: Zunächst beliebiges $\nu \in \mathbb{C}$ zulassen.

A. Lösungsstruktur der komplexen DGL (762) nahe bei $z = 0$

Null ist ein regulär-singulärer Punkt von (762). Sonst hat (762) keine Singularitäten. Indexgleichung:

$$I: \alpha(\alpha - 1) + \alpha - \nu^2 = 0 = \alpha^2 - \nu^2 \quad (763)$$

\Rightarrow Charakteristischer Exponent $\alpha_{1/2} = \pm\nu$. Eigenwerte der Monodromie: $\lambda_1 = e^{2\pi i\nu}$, $\lambda_2 = e^{-2\pi i\nu}$. $\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = 2\nu \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \nu$ ist ganz oder halbzahlig. Wie in 4.5 erhält man eine Lösungsbasis von (762) der Form

$$w_1 = z^\nu (1 + h_1(z)) \quad (764)$$

$$w_2 = z^\nu (1 + h_2(z)) + cw_1 \log z \text{ wobei:} \quad (765)$$

- h_1, h_2 sind analytisch in Umgebung von 0.
- $h_1(0) = h_2(0) = 0$
- $c \neq 0$, falls $\nu = 0$

Frage: Sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein charakteristischer Exponent von (762) und $w = w(z)$ die zugehörige Lösung. Wann ist w logarithmenfrei, d.h.:

$$w(z) = z^\alpha (1 + h(z)), \quad (766)$$

wobei $h(z)$ analytisch in Umgebung von 0, $h(0) = 0$?

$$\text{Dann: } h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k z^k, \quad u_0 := 1 \quad (767)$$

Wie in 4.5 setzen wir w, w', w'' in (762) ein und erhalten (beachte: $\alpha^2 = \nu^2$) durch Koeffizientenvergleich:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= 1 \\ (1 + 2\alpha)u_1 &= 0 \\ k(k + 2\alpha)u_k + u_{k-2} &= 0 \text{ für } k \geq 2 \end{aligned} \right\} \quad (768)$$

(768) ist notwendig und hinreichend dafür, dass $w(z) = z^\alpha (1 + h(z))$ eine Lösung von (762) ist.

1. Angenommen: (768) ist erfüllt und α ist eine negative ganze Zahl. Setze $k = -2\alpha$. k positive gerade ganze Zahl und

$$-2\alpha(-2\alpha + 2\alpha)u_{-2\alpha} + u_{-2\alpha-2} = 0 \Rightarrow u_{-2\alpha-2} = 0 \quad (769)$$

Wegen (768) folgt rekursiv aus $u_{-2\alpha-2} = 0$: $u_{-2\alpha-4} = 0, \dots, u_0 = 0 \nmid$

2. Sei nun α keine negative ganze Zahl. Setze $u_k = 0$ für k ungerade. Für gerade Indizes definieren wir rekursiv:

$$u_0 := 1; \quad u_{2k} = \frac{-u_{2k-2}}{2k(2k+2\alpha)}, \quad k \geq 1 \text{ ganz} \quad (770)$$

Damit erfüllt $w(z)$ die Bedingung (768), ist also Lösung von (762). Ferner ist nach dem Quotientenkriterium der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$ unendlich, d.h. $h(z)$ ist eine ganze Funktion.

Fasse zusammen:

4.7.1 Satz

Sei $\alpha \neq 0$ ein charakteristischer Exponent von (762). Dann gilt: Die zu α gehörige Lösung ist logarithmenfrei $\Leftrightarrow \alpha$ ist keine negative ganze Zahl. In diesem Fall gilt weiter:

$$w(z) = z^\alpha (1 + h(z)), \quad (771)$$

wobei $h(z)$ eine ganze analytische Funktion ist mit $h(0) = 0$.

4.7.2 Korollar

Die ganz- bzw. halbzahlige Besselgleichung hat ein FS der Gestalt

$$w_1(z) = z^\nu (1 + h_1(z)) \quad (772)$$

$$w_2(z) = z^{-\nu} (1 + h_2(z)) + c w_1 \log z \quad (773)$$

Dabei: $c = 0$, falls $\nu = n + \frac{1}{2}$, $n \geq 0$ ganz; $c \neq 0$, falls $\nu = n \geq 0$ ganz.

B. Bessel- und Neumannfunktionen

Explizite Darstellung der logarithmenfreien Lösungen

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ ein charakteristischer Exponent von (762), welcher keine negative ganze Zahl ist. Eine zu α gehörige (logarithmenfreie) Lösung

$$w(z) = z^\alpha \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k z^k \right) \quad (774)$$

von (762) erhält man rekursiv durch: $u_k = 0$, falls k ungerade,

$$u_0 = 1, \quad u_{2k} = \frac{-u_{2k-2}}{2k(2k+2\alpha)}, \quad k \geq 1 \quad (775)$$

Durch vollständige Induktion zeigt man

$$u_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (\alpha + 1) \dots (\alpha + k)}, \quad k \geq 1 \quad (776)$$

Fazit:

4.7.3 Bemerkung

Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ ein charakteristischer Exponent von (762), welcher keine negative ganze Zahl ist, so ist

$$w(z) = z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! (\alpha + 1) \dots (\alpha + k)} \quad (777)$$

eine Lösung der Besselgleichung zum Index α .

Ziel: Berechne eine explizite zweite Lösung im ganzzahligen Fall.

Definition: Sei $H : \operatorname{Re} z > 0$ die rechte Halbebene. Für $z \in H$ setzt man:

$$\Gamma(z) := \int_{-1}^1 e^{-t} t^{z-1} dt \quad (778)$$

heißt GAMMA- FUNKTION. In der Funktionentheorie lernt man:

1. Γ lässt sich auf eindeutige Weise zu einer analytischen Funktion Γ auf $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$ fortsetzen. Darauf hat Γ keine Nullstellen. In den Punkten $\nu = \{-1, -2, \dots\}$ hat Γ einen einfachen Pol mit

$$\operatorname{Res}_\nu \Gamma = \frac{(-1)^\nu}{(-\nu)!} \quad (779)$$

2. $\Gamma(1) = 1$ und Γ genügt der Identität

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (780)$$

Insbesondere für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \dots = n! \quad (781)$$

(Γ interpoliert die Fakultät)

Sei nun $\alpha \in \mathbb{C}$ ein charakteristischer Exponent von (762), aber keine negative ganze Zahl

$$\Gamma(\alpha+k+1) = (\alpha+k)(\alpha+k-1) + \dots + (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1) \quad (782)$$

Multipliziere $w(z)$ aus 4.7.3 mit $(2^\alpha \Gamma(\alpha+1))^{-1}$. Erhalte:

$$J_\alpha(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(\alpha+k+1)} \quad (783)$$

Definition: $J_\alpha(z)$ heißt BESSELFUNKTION vom Index α . Nach 4.7.3: J_α löst die Besselgleichung mit $\nu^2 = \alpha^2$. Es folgt:

4.7.4 Bemerkung

Ist ν in (762) keine ganze Zahl, so ist $\{J_\nu(z), J_{-\nu}(z)\}$ ein FS von (762). Dies gilt insbesondere, wenn $\nu = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$ (halbzahlige Bessel DGL).

Explizite Darstellung eines FS der ganzzahligen Bessel DGL:

Sei $n \geq 0$ ganz. Für $\nu = n$ sind $\pm n$ die charakteristischen Exponenten von (762). $J_n(z)$ ist Lösung von (762) zum Exponenten n .

Ergänzung von $J_n(z)$ zu einem FS:

Definition: Für $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ setze

$$N_\nu(z) := \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi} \quad (784)$$

Für $\nu \notin \mathbb{Z}$ sind also J_ν und $J_{-\nu}$ (gemäß 4.7.4) linear unabhängige Lösungen von (762). Dies gilt dann auch für J_ν und N_ν , also:

4.7.5 Bemerkung

Für $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ist $\{J_\nu, N_\nu\}$ ein FS für (762). Man kann zeigen:

$$N_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n, \nu \in \mathbb{Z}} N_\nu(z) \quad (785)$$

existiert für alle $n \in \mathbb{N}_0$. $N_n(z)$ heißt NEUMANN-FUNKTION zum Index n .

4.7.6 Satz

$\{J_n(z), N_n(z)\}$ bildet für $n \in \mathbb{N}$ ein FS der Bessel DGL

$$w'' + \frac{1}{z}w' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)w = 0 \quad (786)$$